Prof. dr hab. Marek Izydorek
Wydział FT i MS
Politechnika Gdańska
80-233 Gdańsk
ul. G. Narutowicza 11/12

Gdańsk, dn. 30 kwietnia 2016 r.

RECENZJA
rozprawy doktorskiej mgra Aleksandra Czechowskiego
pt. "Rigorous numerics for a singular perturbation problem."

Zagadnienia związane z poszukiwaniem i lokalizacją rozwiązań ograniczonych należą do głównego nurtu badań w teorii równań różniczkowych. Podstawowe pytania dotyczą w szczególności istnienia i krotności rozwiązań periodycznych, homoklinicznych czy hetero-klinicznych. Do uzyskiwania wyników ilościowych i jakościowych rozwiązań równań różniczkowych wykorzystuje się szerokie spektrum metod badawczych począwszy od głębokich twierdzeń analizy funkcjonalnej, poprzez zaawansowane technicznie metody topologiczne, po estymacje numeryczne pozwalające na przeprowadzenie ścisłych matematycznie dowodów wspomaganych komputerowo. Konkretny problem różniczkowy ma swoją własną specyfikę i zwykle wymaga wypracowania oryginalnych metod badawczych swoistych dla tego właśnie problemu. Wyniki teoretyczne sformułowane w postaci twierdzeń często zawierają frazę „dla dostatecznie małej wartości parametru", po której następuje teza.

Autor recenzowanej rozprawy podjął się zadania polegającego na zastąpieniu powyższej frazy konkretnym wyliczeniem zakresu zmienności parametru. Do realizacji tego celu wykorzystuje znany od połowy ubiegłego stulecia model FitzHugh-Nagumo, w którym równania dyfuzji poprzez proste podstawienie sprowadza do układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych. Otrzymany problem ODE, nazywany przez autora układem albo równaniami FitzHugh-Nagumo, należy do szerszej klasy równań, tzw. *slow-fast systems*. Wydaje się, że po polsku wygodniej jest mówić o układach wolno-szybkich. Analiza układu wolno-szybkiego metodami numerycznymi jest trudna ze względu na fakt, że jest to zagadnienie z „małym" parametrem ε. Dla parametru $\varepsilon = 0$ układ rozkłada się na dwa podukłady równań różniczkowych niższego wymiaru, nazywane odpowiednio wolnym i szybkim podukładem. W latach 70-tych i 80-tych ubiegłego stulecia wypracowano szereg metod badawczych dla układów wolno-szybkich, z czego najbardziej znana jest *geometric singular perturbation theory* (GSPT) zaproponowana przez N. Fenichela. GSPT daje możliwość uzyskania jakościowych informacji o dynamice pełnego wolno-szybkiego układu na podstawie danych uzyskanych z analizy jego podukładów. W szczególności, stosując tę metodę można uzyskać wyniki o istnieniu rozwiązań periodycznych i homoklinicznych ustalonego systemu dla parametru $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, o ile ε_0 jest „dostatecznie małe". Głównym celem autora rozprawy jest przypisanie parametrowi ε_0 konkretnej wartości liczbowej. Wyniki badań sformułowane w postaci twierdzeń: Tw. 1.2.1 oraz Tw. 1.2.4 dotyczą istnienia orbit periodycznych i homoklinicznych dla wolno-szybkiego układu FitzHugh-Nagumo. W pracy znajdujemy ponadto dwa twierdzenia, z których pierwsze, Tw. 1.2.2, rozszerza zakres zmienności parametru ε wyznaczony w Tw. 1.2.1 o jeden rząd wielkości. Twierdzenie 1.2.3 o istnieniu rozwiązania periodycznego dla maksymalnej wartości parametru $\varepsilon = \varepsilon_0$ wyznaczonej w Tw. 1.2.2 nie stanowi nowego rezultatu matematycznego. Daje jednak informację, że uzyskana wartość liczbowa ε_0 jest na tyle duża, by dowód twierdzenia można było przeprowadzić z wykorzystaniem klasycznej metody odcinkowej Newtona-Moore'a. Metodologia podjętych przez mgra A. Czechowskiego badań oparta jest na połączeniu dwóch niezależnych metod topologicznych stosowanych w układach dynamicznych oraz na wykorzystaniu metod numerycznych pozwalających na przeprowadzanie ścisłych dowodów wspomaganych komputerowo. Zaproponowana i rozwijana od dłuższego czasu przez promotora pracy P. Zgliczyńskiego metoda pierwsza, związana z pojęciem *covering relation*, jest stosowana w badaniach własności cięć Poincare. Jest to metoda wspomagana komputerowo z zastosowaniem *rigorious numerics*, w tym arytmetyki odcinkowej oraz tzw. *rigorious integration*. Metoda druga, związana z pojęciem segmentu izolującego, jest również efektem badań matematyków krakowskich: R. Srzednickiego i później K. Wójcika (np. [63], [64]). Pozwala ona na analizę pewnych własności sekcji Poincare na podstawie danych o topologicznym zachowaniu wyjściowego pola wektorowego w segmencie izolującym.

Przejdę teraz do omówienia zawartości liczącej 100 stron rozprawy doktorskiej, napisanej w języku angielskim. Praca składa się z czterech rozdziałów zawierających podrozdziały. Wstęp zawiera podstawowe informacje o układach wolno-szybkich, dalej o ścisłej numeryce w równaniach różniczkowych oraz o wspomnianych wyżej metodach topologicznych. W drugiej części Wstępu znajdujemy opis głównych wyników pracy (Twierdzenia: 1.2.1, 1.2.2., 1.2.3, 1.2.4) oraz szkicowe opisy dowodów. W części pierwszej Rozdziału 2 autor szczegółowo opisuje narzędzia topologiczne, które wykorzystuje w swoich dowodach. Są tam definicje i twierdzenia związane z pojęciami: h-zbioru, *covering relation*, *backcovering relation* oraz tzw. warunki stożka. Zarówno definicje jak i podstawowe własności i twierdzenia pochodzą z prac promotora rozprawy: [77] i [80]. W drugiej części tego rozdziału autor opisuje pojęcie segmentu izolującego, a następnie podaje szereg definicji pomocniczych koniecznych do aplikacji tego pojęcia w swojej pracy. Na uwagę zasługuje Podrozdział 2.2.1 zatytułowany *Isolating segments imply coverings*, w którym autor dowodzi Twierdzenie 2.2.10 uzasadniające tytuł podrozdziału. Następnie p. Czechowski dowodzi Twierdzenie 2.2.15 zawierające bardziej szczegółową tezę, istotną w kontekście zastosowań do układu FitzHugh-Nagumo. Do kluczowych teoretycznych wyników autora zaliczyłbym ponadto:

- Twierdzenie 2.3.2 służące do znajdowania orbit okresowych w układach zadanych przez pola wektorowe za pomocą połączonych technik *covering relations* oraz *isolating segments*;
- Twierdzenie 2.3.5 będące modyfikacją powyższego, przystosowaną do specyfiki równań FitzHugh-Nagumo w kontekście przyjętych technik badawczych;
- Twierdzenia 2.3.8 i 2.3.10 służące do znajdowania orbit homoklinicznych oraz Twierdzenie 2.3.11 będące modyfikacją Tw. 2.3.10 przygotowaną do pracy z układem FitzHugh-Nagumo.

W Rozdziale 3 autor podaje teoretyczne twierdzenia niezbędne do uzasadnienia, że wspierane komputerowo dowody głównych tez pracy przeprowadzone są w sposób ścisły. Szczegółowy opis *computer assisted proofs* Twierdzeń 1.2.1 – 1.2.4 kończy ten rozdział. Krótki Rozdział 4 zawiera uwagi końcowe oraz kilka propozycji kierunków dalszych badań.

Omawiając wyniki zawarte w rozprawie mgra Czechowskiego należy wspomnieć o pracy [54] Kaname Matsue, która jako preprint pojawiła się w lipcu 2015, a jej kolejna poprawiona wersja, w lutym 2016 r. W części 1.2.5.2 Podrozdziału 1.2.5 pt. *Related Works* pan mgr Czechowski dokonuje porównania swoich wyników z rezultatami uzyskanymi przez Matsue. Zarówno cel badań, jak i metodologia postępowania w pracy [54] jest bardzo podobna do przedstawionej w rozprawie. Wynika to z faktu, że oba podejścia oparte są na metodach Zgliczyńskiego z wykorzystaniem segmentów izolujących.

Jednakże, ogólniej sformułowane twierdzenia teoretyczne zawarte w recenzowanej rozprawie dają możliwość ich szerszego wykorzystania. Ponadto, p. Czechowski uzyskał wyniki numeryczne większe o rząd wielkości od tych z pracy Matsue. Dotyczy to Twierdzeń 1.2.1 i 1.2.4. Natomiast w Twierdzeniu 1.2.2 autor rozprawy rozszerza zakres zmienności ε o jeszcze jeden rząd wielkości. Niewątpliwie, prace [5] i [54] świadczą o dużym zainteresowaniu problematyką rozwijaną przez doktoranta wśród matematyków z ośrodków zagranicznych.

* * *

Rozprawa doktorska pana mgr. A. Czechowskiego zawiera wyniki z pogranicza matematyki i informatyki. W zasadzie nie mam zastrzeżeń do pracy. Znalazłem jedynie kilka mało istotnych „literówek", np. w formule (1.16) na stronie 23, czy w Def. 2.3.7 na stronie 50. Tekst jest spójny, napisany w sposób dbały i w konsekwencji nie sprawia trudności w czytaniu. Autor rozprawy jasno formułuje rozważane zagadnienia oraz dokonuje logicznie poprawnych analiz działania i poprawności opisanych metod. Konkretne wyniki otrzymane przez doktoranta zostały przedstawione w sposób przejrzysty i precyzyjny, co zapewne jest niemałą zasługą promotora rozprawy. Podział na rozdziały jest naturalnie dostosowany do przyjętego sposobu prezentacji uzyskanych wyników. Pan mgr A. Czechowski jest współautorem jednej publikacji cytowanej w rozprawie [18]. Ponadto, treść rozprawy została już częściowo opublikowana jako preprint [17], którego współautorem jest promotor.

Podsumowując stwierdzam, że cele badawcze zakreślone przez autora we Wstępie do rozprawy zostały w pracy zrealizowane. Bibliografia przedmiotu licząca 81 pozycji jest wyczerpująca. Autor zajmuje się ciekawą i wciąż dynamicznie rozwijającą się problematyką, polegającą na wypracowaniu technik wspomaganego komputerowo ścisłego dowodzenia twierdzeń o charakterze teoretycznym, jak i tych pochodzących z zastosowań. Otrzymane rezultaty z jednej strony poszerzają naszą wiedzę o naturze konkretnego typu równań, w tym przypadku równań FitzHugh-Nagumo. Z drugiej zaś strony, wskazują na nowe możliwości wykorzystania metod topologii obliczeniowej w rozmaitych zagadnieniach pochodzących z teorii i zastosowań.

Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska pana mgr. Aleksandra Czechowskiego spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim. Dlatego, z pełnym przekonaniem oraz zgodnie z obowiązującą procedurą **wnoszę o jej dopuszczenie do publicznej obrony**.

Marek Izydorek