

**Recenzja w postępowaniu o nadanie dr Maciejowi  
Ulasowi stopnia doktora habilitowanego nauk  
matematycznych na podstawie osiągnięcia naukowego:  
„Punkty wymierne na krzywych, powierzchniach i  
wyżej wymiarowych rozmaitościach algebraicznych”.**

Tomasz Szemberg

Osiągnięcie naukowe dr Macieja Ulasa przedstawione do habilitacji składa się z 8 prac, które zostały opublikowane w czasopiśmie z listy filadelfijskiej w latach 2011-16. Trzy spośród tych prac doktor Ulas napisał samodzielnie, pozostałe 5 ma jako współautora prof. Bremnera oraz jedna Prof. Choudhry'ego.

Rozprawa dotyczy fundamentalnego problemu istnienia punktów wymiernych na pewnych konkretnych klasach afinicznych rozmaitości algebraicznych. W pewnych przypadkach możliwy okazuje się bardziej szczegółowy opis zbioru wszystkich takich punktów lub przynajmniej wyróżnienie w nim ciekawych podzbiorów, np. opisanych przez krzywe wymierne.

Problematyka ma swoje korzenie w starożytnej Grecji. Równania i układy równań o współczynnikach całkowitych badał Diofantos. To dla jego upamiętnienia mówimy o równaniach diofantycznych.

Najbardziej znane równania tego typu to, w moim przekonaniu, równanie Pitagorasa i ogólniej równania Fermata. Równanie Pitagorasa to, oczywiście,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Od dawna wiadomo, że posiada ono nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych. Różnym metodom wyznaczania i opisanie wszystkich tzw. trójek pitagorejskich poświęcono wiele opracowań naukowych i popularnonaukowych. Równania Fermata dopuszczają wykładniki całkowite  $n \geq 3$

$$a^n + b^n = c^n.$$

Mniej więcej 300 lat zajęło wykazanie, że te równania nie mają nietrywialnych rozwiązań w liczbach całkowitych. Kluczem okazało się wskazanie związków równań Fermata z krzywymi eliptycznymi.

Doktor Ulas w swojej pracy badawczej zajmuje się równie konkretnymi równaniami i ich rodzinami jak wspomniane wyżej równania Fermata. Charakterystyczną cechą teorii liczb jest to, że rozwiązania nawet elementarnie sformułowanych problemów wymagają często wielu lat intensywnych badań i poszukiwań. W odniesieniu do konkretnych problemów nie stworzono przy tym właściwie żadnych uniwersalnych narzędzi. Ich badanie często odwołuje się do programów z algebry symbolicznej. Co najmniej od czasu opublikowania wyników Wilesa, teoretycy liczb chętnie sięgają po krzywe eliptyczne. Te krzywe często pojawiają się w pracach doktora Ulasa. Nie stosuje on co prawda w odniesieniu do nich równie zaawansowanych metod jak

te, które Wiles wprowadza w dowodzie Wielkiego Twierdzenia Fermata, ale bez wątplenia doktor Ulas zna krzywe eliptyczne, doskonale je rozumie i potrafi w bardzo sprytny sposób stosować. Oczywiście, różne własności krzywych eliptycznych, to tylko jedno z narzędzi wykorzystywanych przez doktora Ulasa. Uprawiana przez niego tematyka często wymaga stosowania metod ad hoc. Nawet z pozoru podobne zagadnienia wymagają nierzadko niebanalnych nowych pomysłów. Tych doktorowi Ulasowi, na szczęście, nie brakuje. Ciekawym aspektem jego pracy są prowadzone eksperymenty z wykorzystaniem programów komputerowych. Jest to bliskie mi podejście, które sam chętnie wykorzystuję w swojej grupie badawczej. Dlatego też wiem, że sensowne użycie komputera jako narzędzia wspomagającego, czy testującego daną hipotezę, nieraz wymaga rozwiązania dodatkowych, zawilych problemów programistycznych i logicznych.

W pracach składających się na osiągnięcie habilitacyjne pojawiają się trzy główne grupy tematyczne:

- badanie rozkładalności trójmianów

$$x^n + A \cdot x^m + B,$$

gdzie  $A, B$  są różnymi od zera liczbami wymiernymi;

- badanie powierzchni diagonalnych, opisanych równaniami postaci

$$a \cdot x^p + b \cdot y^q + c \cdot z^r + d \cdot t^s = 0,$$

z wykładnikami spełniającymi warunek  $1/p + 1/q + 1/r + 1/s = 1$  oraz współczynnikami całkowitymi;

- geometryczny problem istnienia punktów wymiernych mających wymierne odległości od pewnego ustalonego, skończonego zbioru punktów wymiernych.

W każdym z tych tematów pan doktor Ulas uzyskał wyniki, które można uznać za jego znaczący wkład w rozwój teorii liczb. Osiągnięcia, które uznaję za najważniejsze w poszczególnych grupach tematycznych to (odwołuję się do oznaczeń z autoreferatu, nie przytaczam samych wyników): Twierdzenie 2.1 dotyczące typów rozkładów trójmianów czwartego stopnia, Twierdzenie 3.2 dotyczące gęstości w topologii euklidesowej punktów wymiernych na pewnej powierzchni diagonalnej stopnia 6 i wreszcie Twierdzenia 4.11 i 4.12 dotyczące zbiorów punktów będących rozwiązaniami problemu rozmieszczenia punktów o wymiernych odległościach od wierzchołków pewnych prostokątów.

Z dokładniejszej lektury prac habilitanta wynika, że często bada on rozwiązania równania poprzez ich redukcję do różnych skończonych charakterystyk. Jest to naturalna metoda. Być może ciekawe byłoby bliższe przyjrzenie się rozważanym w pracach doktora Ulasa problemom w ogóle w skończonej charakterystyce, jako głównej arenie badań.

Dorobek naukowy pana doktora Ulasa oceniam bardzo wysoko. Widać w nim dużą systematyczność. Składają się na niego 42 opublikowane prace, z czego 9 zostało opublikowanych przed lub w związku z uzyskaniem doktoratu, a pozostałe 33 prace zawierają wyniki otrzymane po uzyskaniu stopnia doktora. Prace pana doktora Ulasa są zauważalne w środowisku. Ma on około 60 cytowań w Web of Science i około 100 na MathSciNet. Pan doktor Ulas cytowany jest przez około 60 autorów, co

nie pozostawia wątpliwości co do autentyczności cytowań i znaczącego rozpowszechnienia jego wyników. Wyniki te są też regularnie prezentowane na konferencjach krajowych i międzynarodowych.

Doktor Ulas był kierownikiem w dwóch grantach indywidualnych i jest obecnie wykonawcą w grantzie typu Sonata. Są to znaczące osiągnięcia zważywszy na ogromną konkurencję w staraniach o granty. Dodatkowo odnotować należy, że doktor Ulas jest promotorem pomocniczym w przewodzie doktoranta, który uzyskał grant typu Preludium.

Wypromowanie w czasie od ukończenia doktoratu 7 magistrantów i 2 licencjatów również korzystnie świadczy o zaangażowaniu doktora Ulasa w pracę dydaktyczną i szeroko rozumiane promowanie nauki.

Reasumując, uważam, że przedstawione osiągnięcia naukowe oraz pozostałe osiągnięcia habilitanta spełniają wszelkie formalne i zwyczajowe wymagania stawiane habilitacji z nauk matematycznych i wnioskuję o nadanie doktorowi Maciejowi Ulasowi stopnia doktora habilitowanego w zakresie nauk matematycznych.



*Journal of Management Studies*