dr hab. Mariusz Skałba, prof.UW
Wydział Matematyki
Uniwersytet Warszawski
e-mail: skalba@mimuw.edu.pl

Recenzja rozprawy habilitacyjnej pana dr Macieja Ulasa

Pan dr Maciej Ulas przedstawił jako rozprawę habilitacyjną (osiągnięcie naukowe) cykl ośmiu prac, pod wspólnym tytułem
Punkty wymierne na krzywych, powierzchniach i wyżej wymiarowych rozmaitościach algebraicznych.
Prace te zostały wymienione w autoreferacie jako prace od H1 do H8, i omawiając ich wyniki w dalszym ciągu recenzji, na te ich oznaczenia będę się powoływał. Cztery z tych prac zostały napisane samodzielnie przez dr Ulasa. W trzech pracach jedynym współautorem był Andrew Bremner ze stanowego uniwersytetu w Arizonie, natomiast praca H7 została napisana przez trójkę autorów – trzecim jest Ajai Choudhry z Lucknow. Deklaracje współautorów Ulasa potwierdziły moje przypuszczenie, że udział habilitanta w uzyskaniu wspólnych rezultatów był każdorazowo więcej niż istotny.

Te osiem prac, przedstawionych przez dr Ulasa jako osiągnięcie naukowe, zawiera wiele interesujących i oryginalnych wyników. Niektóre z nich zostały opisane w autoreferacie w zajmujący i rzetelny sposób – o niektórych z nich wspomnę w dalszym ciągu mojej recenzji. Najpierw jednak wypowiem kilka uwag ogólniejszej natury.

Wyniki prac Ulasa z rozprawy habilitacyjnej dotyczą przede wszystkim teorii równań diofantycznych. Jak powszechnie wiadomo, użycie słowa "teoria" jest tu na wyrost- przeczuwał to już Hilbert, a udowodnił Matijasiewicz. Mimo tego smutnego stanu rzeczy geometria diofantyczna jest jednym z najbujniej rozwijających się działów matematyki głównego nurtu. Przy czym do powszechnej świadomości matematyków przebijają się głównie wyniki negatywne – na przykład ten, że pewna rodzina równań diofantycznych z XVII wieku nie ma rozwiązań. W tym sensie wyniki habilitanta są na obrzeżach tradycyjnie rozumianego głównego nurtu, gdyż typowy wynik Ulasa ma charakter pozytywny i orzeka, że dane równanie diofantyczne ma nieskończenie wiele rozwiązań. Co więcej metody dowodowe, typowe dla Ulasa, dają na ogół parametryczną rodzinę rozwiązań, przy czym stara się on za każdym razem, aby parametryzacja zawierała jak najwięcej swobodnych parametrów oraz składała się raczej z wielomianów – obie rzeczy w miarę możliwości dostępnych w rozważanym przypadku.

Oczywiście problematyka podejmowana przez habilitanta ma również solidne ugruntowanie historyczne, żeby przywołać badania Eulera kwartyki $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$ i słynny wynik Elkiesa z lat osiemdziesiątych XX wieku obalający hipotezę Eulera dotyczącą kwartyki $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$. Te wyniki mają charakter prototypowy i wespół z klasyczną książką Mordella "Diophantine Equations" stanowią inspiracją dla Ulasa i innych licznych matematyków, którzy na całym świecie rozwijają tę problematykę. Warto też dodać, że obaj współautorzy Ulasa są specjalistami światowej klasy, autorami wielu wyników, z których niektóre zapierają dech w piersiach.

I wreszcie kilka słów o metodzie badań doktora Ulasa. W przeważającej mierze metody te bazują na pojęciach i podstawowych twierdzeniach klasycznej geometrii algebraicznej. W wyniku bardzo sprytnych wielokrotnych zamian współrzędnych (na ogół dobrze umotywowanych geometrycznie) udaje się autorowi sprowadzić problem istnienia rozwiązań danego równania diofantycznego (lub układu równań) do znalezienia punktów na krzywej niewielkiego genusu , nad ciałem podstawowym lub funkcyjnym. Częstym narzędziem jest np. twierdzenie Nagella–Lutz opisujące punkty torsyjne na krzywych eliptycznych lub twierdzenie Faltingsa o skończoności punktów wymiernych na krzywej genusu > 1. Te metody wspierane są w razie konieczności przez twierdzenia z algebraicznej teorii liczb, gdy wymagane jest przejście do skończonego rozszerzenia ciała liczb wymiernych. Na uznanie zasługuje również swobodne i skuteczne korzystanie przez Ulasa ze wspomagania komputerowego – czytając jego prace utwierdzam się w przekonaniu, że czasy, w których udawało się zaobserwować i odkryć wszystko na kartce papieru, raczej minęły bezpowrotnie.

Przechodzę teraz do bardziej szczegółowego omówienia niektórych wyników habilitanta, włączonych przez niego do osiągnięcia naukowgo.

W pracy H2 autorzy dowodzą m.in. interesujących twierdzeń dotyczących trójmianów niewielkich stopni, które rozkładają się na czynniki nierozkładalne w zadany sposób. Prototypowe jest tu na przykład następujące twierdzenie:

Nie istnieje trójmian typu $x^6 + Ax + B$, który rozkłada się na iloczyn trzech trójmianów kwadratowych, nierozkładalnych nad $\mathbb{Q}$.

Jego dowód jest bardzo wyrafinowany i wymaga w zasadzie zaprzęgnięcia całego arsenału metod, o których wyżej wspominałem. Inny wynik z tej pracy stwierdza, że nie istnieje trójmian postaci $x^5 + Ax + B$, o dokładnie trzech pierwiastkach wymiernych (licząc z krotnościami). Wyniki te, i wiele innych zawartych w pracy H2, uzupełniają klasyczne rezultaty Schinzla dotyczące rozkładalności trójmianów.

W pracach H1, H5 i H7 autorzy zajmują się równaniami, które nazywają diagonalnymi. Każde takie równanie opisuje powierzchnię w przestrzeni rzutowej z wagami. Oczywiście wagi nie są potrzebne w przypadku wspomnianych wyżej kwartyk Eulera i Eulera-Elkiesa. Na szczególną uwagę zasługuje następujący wynik z pracy H1

Równanie $x^6+y^6+z^6 = w^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z, t spełniających $\mathrm{NWD}(x, y, z) = 1$.

Podobnie imponujący jest następujący wynik z pracy H7

Dla nieskończenie wielu zestawów parametrów P, Q, R, S powierzchnia $Px^6 + Qy^6 + Rz^3 + Sw^6 = 0$ ma nieskończenie wiele punktów wymiernych.

Trudność w uzyskaniu tego typu rezultatu związana jest z tym, że wszystkie wykładniki w tym równaniu są duże; formalnie $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/3 = 5/6 < 1$, podczas, gdy typowe równanie diagonalne ma ex definitione sumę odwrotności wykładników równą 1.

W pracach H3 oraz H4 Ulas zajmuje się równaniami diofantycznymi w których kilka zadanych wielomianów symetrycznych zadanej liczby zmiennych ma przyjmować zadane wartości wymierne. Prototypem jest tutaj twierdzenie Schinzla z 1996 roku, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje nieskończenie wiele układów złożonych z k trójek dodatnich liczb całkowitych mających tę samą sumę i ten sam iloczyn. Ulas dowodzi ogólniejszych twierdzeń, w których występują trzy zadane wielomiany symetryczne podstawowe lub (na mocy wzorów Newtona) sumy potęg, oraz podane przez niego rozwiązania zawierają dużo wolnych parametrów - tu zasadza się ich wartość.

Z kolei, w pracy H6, habilitant uzyskał ciekawe wyniki dotyczące tzw. równań normowych. Po jednej stronie takiego równania występuje forma normowa danego skończonego rozszerzenia ciała podstawowego k, a po prawej wielomian jednej zmiennej o współczynnikach z k. W przypadku danego rozszerzenia kwadratowego i wielomianu stopnia 3 lub 4 (po prawej stronie równania) odpowiednią hiperpowierzchnię nazywa się powierzchnią Chateleta. Ich teoria arytmetyczna jest dość dobrze rozwinięta. Wyniki Ulasa wykraczają poza ten klasyczny przypadek. Rozpatruje on mianowicie rozszerzenie stopnia 3 postaci $k(\sqrt[3]{b})$, gdzie $b \notin k^3$ a wielomian po prawej stronie ma być czwartego stopnia. Dowodzi, że jeśli na tej hiperpowierzchni istnieje punkt k-wymierny to jest ona k-uniwymierna. Przedstawia również wyniki dla pewnych wielomianów stopnia 5 i 6 (np. dla wszystkich nierozkładalnych stopnia 5).

Wreszcie, w pracy H8, habilitant wspólnie z Bremnerem, rozważają problemy diofantyczne motywowane elementarnymi problemami metrycznymi na płaszczyźnie. Rozważmy prostokąt $\mathcal{R}_a$ o wierzchołkach w punktach $(0,0),(0,1),(a,0),(a,1)$, gdzie $a \in \mathbb{Q}$. Autorzy dowodzą następującego twierdzenia

Zbiór tych $a \in \mathbb{Q}$, że istnieje nieskończenie wiele punktów wymiernych o wymiernych odległościach od wierzchołków prostokąta $\mathcal{R}_a$, leżących wewnątrz $\mathcal{R}_a$, jest gęsty (w topologii euklidesowej) w $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Praca ta zawiera również pewne wyniki dotyczące problemów metrycznych w przestrzeni.

Pozostały dorobek naukowy habilitanta (nie włączony do rozprawy habilitacyjnej) jest również bardzo interesujący.

W pracach P6,P8,P20 autor bada skręcenia krzywych eliptycznych i ogólniejszych. Przy niezbyt restrykcyjnych założeniach potrafi udowodnić, że równoczesne skręcenia kilku (dwóch lub trzech) krzywych eliptycznych mają dodatnią rangę, dla gęstego (w topologii euklidesowej) zbioru parametrów skręcających.

Praca P7 ma dość techniczny charakter ale zawiera następujący piękny rezultat

Równanie diofantyczne $x_1^4 + x_2^4 = y_1^6 + y_2^6$ ma nieskończenie wiele nietrywialnych rozwiązań całkowitych.

Następujący wspaniały wynik, z pracy P2, odpowiada na pytanie postawione przez Siepińskiego w jego słynnej książeczce "Liczby trójkątne":

Istnieje nieskończenie wiele trójek różnych liczb trójkątnych, takich, że ich wszystkie sumy parami też są trójkątne.

Inny piękny wynik Ulasa dotyczący liczb trójkątnych (z pracy P4) głosi, że

równanie $t_x^2 + t_y^2 = z^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}[t]$.

Powyższe przykłady wyników Ulasa daleko nie wyczerpują opisu jego bardzo oryginalnych osiągnięć w dziedzinie równań diofantycznych.

Ale warto dodać, że dorobek matematyczny dr Ulasa nie jest monotematyczny. W pracach P12, P14 autor zajmuje się arytmetycznymi własnościami ciągu wielomianów Sterna. W pracy P24, wspólnej z J. Byszewskim, wyprowadza nowe tożsamości w które uwikłany jest ciąg Thue-Morse'a. Warto zaznaczyć, że badaniu różnych własności powyższych ciągów poświęca uwagę wielu autorów (matematyków i fizyków) na przestrzeni ostatnich kilkudziesięciu lat. Wyniki uzyskiwane przez Ulasa i jego uczniów (M. Gawron, praca [21]) dobrze wpisują się w arytmetyczny wątek tych badań, prowadzonych w światowych ośrodkach.

Aktywność naukowa pana dr Macieja Ulasa przejawia się na wielu płaszczyznach. Habilitant był kierownikiem dwóch grantów w latach 2011-2014 i obecnie jest wykonawcą jednego projektu na UJ, oraz współwykonawcą innego grantu. W latach 2008-2015 wygłosił około dwadzieścia referatów na konferencjach krajowych i zagranicznych, przy czym na V Forum Matematyków Polskich miał odczyt plenarny, a na dwóch wysoko specjalizowanych konferencjach zagranicznych miał wykłady proszone. Pan dr Ulas współpracuje z wieloma matematykami w kraju i zagranicą – wynika to niezbicie z listy jego publikacji.

Dba również o rozwój młodej kadry: obecnie jest promotorem pomocniczym mgr Macieja Gawrona w jego przewodzie doktorskim (przewidywany termin obrony, czerwiec 2016). Praca magisterska pana Gawrona napisana pod opieką dr Ulasa zdobyła III nagrodę w Konkursie im.

Józefa Marcinkiewicza w 2012 roku. Praca innego ucznia dr Ulasa, pana Piotra Miski, napisana na I roku studiów II stopnia zdobyła III nagrodę w tym konkursie w roku 2014r. Habilitant jest bardzo aktywnie zaangażowany w popularyzację matematyki zarówno na poziomie wyższym jak i średnim.

Pan dr Ulas jest laureatem wielu nagród naukowych, zarówno na Uniwersytecie Jagiellońskim, jak i tych ogólnopolskich. W roku 2010 dostał np. stypendium tygodnika POLITYKA w ramach programu "Zostańcie z nami".

Podsumowując, uważam, że rozprawa habilitacyjna dr Macieja Ulasa jest wybitna. Podobnie oceniam jego ogólną aktywność naukową i pozostały dorobek matematyczny po doktoracie. Ulas publikuje swoje prace wyłącznie w dobrych i bardzo dobrych światowych czasopismach, przy czym prace wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej ukazały się wyłącznie w bardzo dobrych czasopismach. Najważniejsze jest jednak to, że przedstawione w nich wyniki bronią się same - w większości są to wyniki bardzo interesujące, a niektóre wręcz wybitne.

Przedstawione przez pana dr Ulasa osiągnięcie naukowe w postaci cyklu ośmiu prac, oraz jego wcześniejsze dokonania z teorii liczb, są z dużym naddatkiem wystarczające dla nadania mu stopnia naukowego doktora habilitowanego w zakresie matematyki, zgodnie z odpowiednią ustawą. Ponadto wnoszę z pełnym przekonaniem o wyróżnienie jego rozprawy habilitacyjnej.

Warszawa, 22.02.2016r.

Mariusz Skałba