Piotr Zgliczyński
Instytut Informatyki UJ

Kraków, 4 stycznia 2016

Recenzja rozprawy doktorskiej *Franka Weilandta* zatytułowanej *Rigorous Numerical Computation of the Conley Index for Flows*

Zacznijmy od podsumowania: w mojej ocenie spełnia warunki stawiane doktoratom z matematyki i wnioskuję o dopuszczenia F. Weilandta do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

W dalszym ciągu recenzji będę używał skrótu FW dla odniesenia do autora rozprawy.

Praca dotyczy ścisłego numerycznego obliczania indeksu Conley'a dla potoków. Wydaje się, że główny akcent pracy jest położony raczej na teoretyczne aspekty - zaprojektowanie algorytmów niż otrzymanie nowych wyników dotyczących dynamiki interesujących układów.

Rozdział drugi zawiera definicje indeksu Conleya dla potoków oraz przegląd różnych podejść do definicji indeksu Conleya dla odwzorowań (dyskretnego indeksu Conleya). Poza dygresją w podrozdziale 2.5.5 (definicja dyskretnego indeksu poprzez 'mapping torus') rozdział ten nie zawiera żadnych własnych wyników JW. Jeśli chodzi o *mapping torus* to z zawartości doktoratu nie widać jeszcze czy jest to coś użytecznego.

W rozdziale 3-im JW omawia numeryczne wyznaczanie indeksu Conleya dla potoków. Podstawowa technika omówiona w pracy to rozważanie, φ_h, odwzorowania przesunięcia wzdłuż trajektorii o ustalony krok czasowy i konstrukcja pary indeksowej (N, L) dla φ_h. Z prac promotora z lat 1990 wynika, że można w ten sposób wyliczyć (homologiczny) indeks Conley'a potoku. Rozdział ten nie zawiera własnych wyników JW, a jedynie uwagi dotyczące problemu z optymalnym wyborem kroku czasowego h. Na stronie 38 JW pisze: *Our numerical experiments show that beginning with a given flow φ ..., the homological index map is often the identity.* Wydaje mi się, że tak jest zawsze, dla potoku odwzorowanie indeksowe jest zawsze identycznością. Wydaje się, że jeśli otrzymamy identyczność jako odwzorowanie indeksowe, to świadczy to że nasz algorytm wygenerował 'dobrą' parę indeksową nie zawierającą zbędnych składowych w zbiorze wyjścia.

Rozdział 4 *The Conley index for Poincaré maps* wydaje mi się być najciekawszym w pracy. We wstępie, zapowiadając ten rozdział, JW pisze, że w kontekście, P, odwzorowania przesunięcia o okres T dla równania nieautonomicznego $x' = f(t, x)$ z T-okresową prawą stroną , *Finding the Conley index of P using the standard approach .. would require enclosing the image of boxes after time T. This is infeasible if solution curves expand very quickly. Another difficulty is that P is often not defined on every point (t, x), but only on a subset.* Ten problem został zauważony dobrych 20 lat temu i wtedy też znaleziono lekarstwo na niego - jest to 'metoda sekcji pośrednich'. Daje ona dobre wyniki w licznych komputerowo wspieranych dowodach w dynamice i niewątpliwie umożliwiłaby również obliczenie indeksu Conley'a. Samo podejście rozważane w tym rozdziale jest rozszerzeniem wcześniejszych wyników Mrozka i Srzednickiego, którzy rozważali segment izolujący podczas gdy w rozprawie mamy parę indeksową. Czyni to dowody trudniejszymi, ale metoda jest ogólniejsza bo łatwiej skonstruować (na komputerze) parę indeksową dla odwzorowania przesunięcia o czas h (dla rozsądnych wyborów h), niż blok izolujący dla potoku. Metoda dowodu przedstawiona w pracy wydaje mi się być mieszaniną 'sekcji pośrednich' i metody homotopii dla segmentów izolujących rozwiniętej przez Srzednickiego. Te rezultaty pochodzą ze wspólnej pracy JW z Mrozkiem i Srzednickim. Oryginalnym wkładem JW są zaprezentowane w tym rozdziale algorytmy, i dowody ich poprawności, do obliczenia odwzorowania indeksowego dla odwzorowania Poincaré dla H_1 (1-ej grupy homologii). Trudno powiedzieć czy faktycznie z numerycznego punktu widzenia zaprezentowana metoda jest efektywniejsza niż metoda sekcji pośrednich (patrz też kolejny rozdział recenzji, gdzie dyskutuję przykłady numeryczne). W danym momencie metoda jest ograniczona do równań nieautonomicznych, ale z koncepcyjnego punktu widzenia nie powinno być trudności w przystowaniu jej do układów autonomicznych. Np. wystarczy znaleźć (skonstrułować) współrzedną, która będzie rosła w czasie ewolucji tak długo jak trajektorie znajdują się w badanej parze indeksowej.

Rozdział 5 *Time discretization for finding Morse decomposition of a flow* : Podstawą rozważań tutaj jest obserwacja, że można rozważać przesunięcie wzdłuż trajektorii o czas zależny w sposób ciągły, aby obliczyć indeks Conley'a dla potoku, podczas gdy w rozdziale 3-im rozważany był stały krok. W oczywisty sposób można to stosować do obliczenia rozkładów Morse'a i jest to dalej dyskutowane w rozprawie.

1 O przykładach numerycznych

Przykłady równań rozważane w rozprawie są raczej rozczarowujące. Od tego typu pracy oczekiwałbym raczej komputerowo wspieranego dowodu nowych faktów, tymczasem w rozprawie znajdujemy następujące przykłady:

- równanie van der Pol'a na stronie 35; wydaje mi się, że istnienie cyklu granicznego przyciągającego wszystkie punkty prócz punktu stałego jest anlitycznie udowodnione w literaturze (to równanie jest szczególnym przypadkiem 'układu Lienarda'). FW pokazuje dla pewnych wartości parametru pokrycie cyklu przyciągającego kostkami.
- przykład 4.5.1. Dla równania

  $$\dot{z} = \left(1 + e^{i\eta t}|z|^2\right)\bar{z}$$

  gdzie $\eta = 2$, FW pokazuje, że jego program konstruuje parę indeksową, która się 'obraca'. Segmenty izolujące o tej własności były konstruuowane analitycznie przez Srzednickiego i innych autorów.

Przyłożenie do tej pary indeksowej twierdzeń z poprzednich rozdziałów daje istnienie orbity okresowej (zdaje się, że niezerowej, ale tego FW już nie wyjaśnia)

- przykład 4.5.3. To jest kolejne równanie typu rozważanego w latach 80 i 90 przez Srzednickiego
$$\dot{z} = e^{i\eta t}\bar{z}^2 + \bar{z}.$$
Podobnie jak w poprzednim przykładzie FW użył programu do konstrukcji 'dużej' obracającej się pary ideksowej i 'małej' pary wokół zera. Konkluzja to podobnie jak w przykładzie poprzednim to istnienie orbity okresowej (niezerowej, ale tego FW już nie wyjaśnia).

  Wynik ten nietrudno uzyskać analitycznie konstruując segmenty izolujące metodą R. Srzednickiego.

- równanie (5.4) to spreparowany układ ze znaną dynamiką, służy do ilustracji pewnych problemów i heurystyk pozwalających ich uniknąć.

Podsumowując te przykłądy, nie widzę w pracy żadnych naprawdę ciekawych wyników, jeśli chodzi o stosowanie przedstawionych algorytmów. Przykłady rozważane są na płaszczyźnie, wyniki uzyskane w pracy można otrzymać analitycznie.

Zgliczyński