

Gdańsk, 19 lutego 2016

Dr hab. Grzegorz Graff, prof. nadzw. PG
Politechnika Gdańska
Wydział Fizyki Technicznej
i Matematyki Stosowanej
80-233 Gdańsk
ul. Narutowicza 11/12

Recenzja rozprawy doktorskiej
magistra Franka Weilandta
p.t. *Rigorous Numerical Computation of the Conley Index for Flows*

Indeks Conleya, to ważny topologiczny niezmiennik, zdefiniowany pod koniec lat 70 ubiegłego wieku, pozwalający na uzyskanie informacji dotyczących istnienia i struktury zbiorów niezmienniczych rozpatrywanego układu dynamicznego.

Częstym problemem, związanym z tego typu niezmiennikami, jest fakt że ich obliczenie wymaga dużego nakładu pracy, a w niektórych przypadkach trudności tego rodzaju w ogóle uniemożliwiają znalezienie niezmiennika. Jedną z głównych zalet indeksu Conleya jest możliwość jego efektywnego wyznaczenia w oparciu o podejście algorytmiczne. Umożliwia to budowanie programów które, przy zachowaniu matematycznej ścisłości (kontrola błędów aproksymacyjnych i zaokrągleń), prowadzą do obliczenia indeksu Conleya. Tej tematyce poświęcona jest recenzowana rozprawa doktorska. Praca napisana jest w języku angielskim, liczy 75 stron i 38 pozycji bibliograficznych. Część merytoryczna pracy podzielona jest na wstęp i 4 rozdziały. W rozdziale 2 analizowane są definicje indeksu Conleya dla potoków i odwzorowań, ze szczegółową dyskusją tego drugiego przypadku. Przy tej okazji dokonany zostaje także przegląd różnych definicji par indeksowych używanych przy konstrukcji dyskretnego indeksu Conleya. Autor opiera się na definicji Franka i Richesona z 2000 r., używając jednak najbardziej ogólnej definicji pary, w której wystarczy założyć ciągłość odwzorowania indeksowego. Następnie wprowadzony zostaje funktor Leraya co pozwala wyrazić indeks również w terminach automorfizmów przestrzeni liniowych.

Warto zwrócić uwagę na podrozdział 2.5.5, w którym doktorant, w charakterze rozbudowanej dygresji, szkicuje nową, własną, wersję indeksu Con-

leja dla odwzorowań, jako typu homotopijnego pewnej przestrzeni. Ta interesująca koncepcja znajduje się obecnie na etapie dopracowywania.

Rozdział 3 poświęcony jest przedstawieniu całego aparatu, który umożliwia zastosowanie podejścia algorytmicznego do obliczania indeksu Conleya. Wymaga to przełożenia pojęć topologicznych na wielkości dyskretne, w szczególności rolę odwzorowania f przejmuje wielowartościowe odwzorowanie (kombinatoryczna otoczka) \mathcal{F} i używa się kostkowych homologii.

W omawianym rozdziale przedstawiony zostaje także główny problem naukowy pracy, którym jest zagadnienie obliczania indeksu Conleya dla potoku ϕ przy pomocy jego dyskretyzacji po czasie $h - \phi_h$. Dzięki istniejącej zależności pomiędzy indeksami, możliwe jest wyznaczenie indeksu dla ϕ poprzez indeks dla ϕ_h , jednak na poziomie algorytmicznym rodzą się różnorodne problemy. Jednym z nich jest wybór właściwej wartości h . Wprawdzie zbiory niezmiennicze są w obu przypadkach dla każdego h takie same, ale okazuje się, że wybór zarówno zbyt małego jak i zbyt dużego h prowadzić może do problemów natury numerycznej. Podkreślić należy, że prezentując w początkowych rozdziałach pracy znane wyniki z teorii indeksu Conleya, doktorant wykazuje się bardzo dobrą znajomością literatury przedmiotu.

Główne rezultaty naukowe rozprawy znajdują się w dwóch ostatnich rozdziałach. W rozdziale 4 wyznaczony zostaje indeks Conleya dla odwzorowania Poincaré dla równania $\dot{x} = f(x, t)$, gdzie f jest periodyczne względem t z okresem T . Wyniki zawarte w tej części opublikowane zostały w obszernym artykule w renomowanym *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems*, a współautorami pracy byli: promotor i Roman Srzednicki.

W rozszerzonej o dodatkowy wymiar przestrzeni fazowej omawiane równanie staje się autonomiczne i indukuje potok na cylindrze Σ , otrzymanym po utożsamieniu punktów mających współrzędne czasowe z przestrzeni fazowej odległe o T . Dla tego potoku określone jest odwzorowanie Poincaré P . Jednakże, ponieważ obliczanie indeksu Conleya bezpośrednio dla odwzorowania Poincaré w ogólnym przypadku napotyka na poważne trudności numeryczne, zaproponowane zostaje inne podejście. Jego przewodnią idea polega na tym, żeby dysponując parą indeksową (N, L) zbioru niezmienniczego S dla ϕ_h (z h dużo mniejszym od T , co znacząco zwiększa efektywność obliczeń) oraz parą indeksową (N_0, L_0) zbioru niezmienniczego S_0 (będącego przekrojem S z cięciem Poincaré) dla P , wyznaczyć indeks Conleya odwzorowania P . Sam pomysł, jak i jego realizację należy ocenić bardzo wysoko, związane są one z głębokim zrozumieniem podstawowych idei indeksu Conleya i wymagają dużej zręczności w budowaniu algorytmów. W pracy, autor najpierw przed-

stawia główny wynik teoretyczny (Theorem 4.2.1) wraz ze szkicem dowodu, a następnie wprowadza algorytmy umożliwiające zastosowanie twierdzenia oraz analizuje zakres ich stosowalności i efektywność. Rozdział kończą przykłady ukazujące działanie algorytmów w przypadku konkretnych równań.

Ostatni rozdział pracy dotyczy badania struktury zbiorów niezmienniczych poprzez rozkład Morse'a i stanowi kanwę złożonego do publikacji artykułu, którego współautorem jest promotor i Konstantin Mischaikow. Kluczowe znaczenie ma tutaj dobór właściwej dyskretyzacji badanego układu ciągłego. W pracy zaproponowana zostaje obiecująca strategia: w miejsce odwzorowania ϕ_h , z h stałym dla wszystkich punktów przestrzeni fazowej, dopuszcza się zmienny krok τ , gdzie τ jest ciągłą funkcją o wartościach rzeczywistych nieujemnych. Poprawność takiego podejścia zapewnia Twierdzenie 5.3.6, określające warunki przy których rozkład Morse'a dla ϕ_τ pokrywa się z rozkładem dla ϕ . Autor ilustruje na przykładzie lepszą efektywność numeryczną metody opartej na zmiennym kroku τ , a także przedstawia propozycję wyboru funkcji τ w zależności od przekątnej kostki w danym podziale przestrzeni.

Rozprawa napisana jest nader przejrzysto, z dużą dozą staranności. Na uznanie zasługuje także dojrzałość autora w redakcji tekstu naukowego - wyraźnie wskazywane są aktualnie obowiązujące założenia, klarownie opisane są wzajemne związki pomiędzy różnymi fragmentami pracy.

Uzyskane wyniki naukowe są interesujące, oryginalne i wartościowe, a wkład twórczy doktoranta (szczegółowo wskazany we wstępie) jest znaczący. Ponadto doktorant wykazuje się dużą biegłością zarówno jeśli chodzi o dowodzenie twierdzeń, jak i konstrukcję algorytmów. Rezultaty rozprawy mogą zostać wykorzystane również w badaniach pozamatematycznych. Algorytmiczne podejście do indeksu Conleya pozwala badać różnego typu zjawiska w sytuacji, gdy nieznana jest formuła na potok opisujący badany proces, a do dyspozycji są tylko dane doświadczalne, na dodatek obarczone błędem pomiaru.

Podsumowując, stwierdzam, że rozprawa mgr. Franka Weilandta, spełnia wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto, biorąc pod uwagę rangę rozwiązanych problemów i oryginalność zastosowanych metod badawczych, wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

Grygor Reff