Janusz Wysoczański
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

Wrocław, 15.09.2015 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Adama Wegerta

1 Uwagi ogólne

Rozprawa doktorska magistra Adama Wegerta, zatytułowana "Koncepcja jednostajności w C^*-algebrach", jest poświęcona badaniu pojęcia zwartości w kontekście C^*-algebr, poprzez wprowadzenie pojęć jednostajności i jednakowej ciągłości dla ich elementów (podzbiorów). Zwartość jest tutaj rozważana w topologii "dualnej", zdefiniowanej przy pomocy specjalnie dobranej metryki na przestrzeni $*$-reprezentacji (nieprzywiedlnych) danej C^*-algebry. Idee badań Autora wywodzą się z klasycznych twierdzeń analizy: tw. Gelfanda-Najmarka dla przemiennych C^*-algebr z jedynką (które okazują się być algebrami funkcji ciągłych na zwartych przestrzeniach Hausdorffa) oraz tw. Arzela-Ascoli, stwierdzającym warunkową zwartość dla rodziny funkcji jednakowo ciągłych i wspólnie ograniczonych na przedziale zwartym. Te idee Autor przenosi na sytuację nieprzemiennych C^*-algebr, których elementy (a priori) nie są funkcjami. Jednak przechodząc do obiektu dualnego, czyli $*$-reprezentacji (zachowujących jedynkę) $Rep(\mathcal{U}) \ni \pi : \mathcal{U} \mapsto B(\mathcal{H}_\pi)$, można je traktować jako funkcje: element $a \in \mathcal{U}$ definiuje funkcję $\widehat{a}(\pi) := \pi(a)$. Dla ośrodkowej C^*-algebry $\mathcal{U}$ z jedynką, na zbiorze $Rep(\mathcal{U})$ (wszystkich $*$-reprezentacji $\mathcal{U}$ w $B(l^2)$, zachowujących jedynkę) Autor wprowadza metrykę

$$d_K(\pi_1, \pi_2) := \sup_{a \in K} \|\widehat{a}(\pi_1) - \widehat{a}(\pi_2)\|, \tag{1}$$

gdzie $K \subset \mathcal{U}$ jest zwartym podzbiorem generującym $\mathcal{U}$. Okazuje się, że funkcja $\widehat{a}$ jest ciągła (nawet jednostajnie) względem tej metryki. Tą metrykę Autor bada szczególnie na zbiorze $\Sigma(\mathcal{U})$ wszystkich "nieprzywiedlnych" $\pi \in Rep(\mathcal{U})$. Wówczas definiuje **zwartość** C^*-algebry $\mathcal{U}$ poprzez zwartość przestrzeni topologicznej $\Sigma(\mathcal{U})$ (w metryce d_K). Pojęcie to, zastosowane do przypadku przemiennej C^*-algebry $\mathcal{U}$ z jedynką, w którym można utożsamić $\Sigma(U)$ z przestrzenią Gelfanda X, prowadzi do stwierdzenia zwartości tej przestrzeni (dla której także jest $\mathcal{U} = C(X)$).

W rzeczywistości metryka d_K w pewnym sensie nie zależy od zbioru K (Autor pokazuje jej jednostajną równoważność z metryką d_L otrzymaną dla dowolnego innego zwartego pozdbioru $L \subset \mathcal{U}$ generującego $\mathcal{U}$). Co więcej, ta metryka generuje topologię zbieżności "normowo-punktowej" ($\pi_\beta \to \pi$ jeśli dla każdego $a \in \mathcal{U}$ jest $\|\pi_\beta(a) - \pi(a)\| \to 0$).

Autor wprowadza także pojęcie **jednakowej ciągłości podzbioru** L w C^*-algebrze $\mathcal{U}$, jeśli rodzina funkcji $\{\widehat{a} : a \in L\}$ jest jednakowo ciągła na $Rep(\mathcal{U})$ (względem d_K). Ponieważ klasyczna własność jednakowej ciągłości zbioru funkcji ciągłych jest równoważna temu, że mają one wszystkie ten sam *moduł ciągłości*, naturalne jest zdefiniowanie przez Autora tego pojęcia także w rozważanym kontekście.

Następnie rozważana jest **własność Ascolego** dla C^*-algebry $\mathcal{U}$: dowolny jej podzbiór $L \subset \mathcal{U}$ jest zwarty relatywnie (inaczej: warunkowo, czyli po domknięciu) *wtedy i tylko wtedy*, gdy jest ograniczony, jednakowo ciągły i punktowo warunkowo zwarty. Ta własność jest porównywana ze zwartością C^*-algebr, przy czym na przykładach Autor pokazuje, że własność Ascolego nie pociąga za sobą zwartości. Natomiast pozytywnym rezultatem jest fakt, że zwartość implikuje **silną** własność Ascolego (jak wyżej, ale bez punktowej warunkowej zwartości).

2 Opis Rozprawy

Rozprawa mgr. Adama Wegerta ma 64 strony, jest podzielona na 10 Rozdziałów oraz spis Literatury. Co ciekawe, wśród 42 pozycji Literatury jest "tylko" 13 artykułów z czasopism, część z lat 60-tych ubiegłego wieku, kilka jest z ostatnich lat (w tym 4 preprinty autorstwa Promotora, dr hab. Piotra Niemca), natomiast reszta to pozycje książkowe. Wydaje się to świadczyć o niewielkim współczesnym zainteresowaniu tą tematyką. Jednak moim zdaniem jest godnym pochwały to, że młody matematyk bierze na swój warsztat taką tematykę i osiąga w niej całkiem ciekawe i nietrywialne wyniki.

2.1 Omówienie wyników Rozprawy

Przejdę teraz do bardziej szczegółowego omówienia wyników Rozprawy. Składa się ona z dwóch Części: w Pierwszej jest Wstęp i 5 Rozdziałów o charakterze ogólnym, w Drugiej są cztery Rozdziały zawierające istotne wyniki Rozprawy oraz komentarz na temat możliwych dalszych badań w poruszanej tematyce.

Wstęp, w którym Autor objaśnia co zawierają poszczególne Rozdziały, jest napisany bardzo przejrzyście i daje znakomity ogólny obraz zawartości Rozprawy.

Rozdział 1, nazwany Preliminaria, wprowadza podstawowe pojęcia teorii C^*-algebr.

W Rozdziale 2 (Podstawy teorii C^*-algebr) podane są własności przemiennych C^*-algebr (z jedynką), które klasyczne tw. Gelfanda-Najmarka identyfikuje z funkcjami ciągłymi na przestrzeniach zwartych. Omówione są też przykłady różnych klas C^*-algebr (jednorodnych, kurczących, CCR), które są istotne w dalszych rozważaniach.

Rozdział 3 został nazwany "Algebra vs. Geometria", pokazuje różnorodność dziedzin matematyki, pojawiających się w badaniach C^*-algebr i szczególne związki między nimi. Są tutaj omówione relacje natury algebraicznej i topologicznej w przypadku przemiennych C^*-algebr, jak w tw. Gelfanda-Najmarka, ale także w przytoczonym tw. Serre-Swana (odpowiedniość modułów projektywnych nad $C(X)$ i wiązek wektorowych nad X). Jest też dyskusja związków z Logiką i Teorią Mnogości na przykładzie Teorii Murray'a-von Neumanna projektorów i ich porządku, pokazany jest też związek z Teorią Miary (dla przemiennych algebr von Neumanna).

Ja dodałbym tu jeszcze klasyczny rezultat von Neumanna – twierdzenie o bikomutancie – które doskonale pokazuje związek struktury algebraicznej (drugiego komutanta) ze strukturą topologiczną (domknięcia w słabej topologii).

Dalej omówione są przykłady naturalnych $*$-algebr zwązanych z grupami (algebra grupowa grupy dyskretnej ze strukturą Hopfa, pełna C^*-algebra grupowa $C^*(G)$ oraz zredukowana $C^*_r(G)$, składające się z odpowiednich reprezentacji grupy G) i dualność Tannaki-Kreina-Pontriagina.

Omówiona jest też rola K-teorii i idee nieprzemiennej geometrii Connes'a, jak również idea kwantowania nieprzemiennego, prowadzącego do zastąpienia klasycznych wielkości obserwowalnych - opisywanych funkcjami - ich nieprzemiennymi (kwantowymi) odpowiednikami - operatorami. Na koniec tych rozważań pokazane jest nieprzemienne uogólnienie pojęcia rozmaitości riemannowskiej do postaci t.zw. *trójki spektralnej.*

Myślę także, że świetnym przykładem postępowania, analogicznego do tego z Rozprawy, jest Teoria Grup Kwantowych (Autor wspomina o nich jedynie zdawkowo), w której właśnie "zapomina się" o grupie, a myśli o funkcjach na niej, jako że w przypadku przemiennym daje się odtworzyć całą strukturę grupy z własności C^*-algebry funkcji ciągłych na niej.W szczególności, wspomniane twierdzenie Tannaki-Kreina o dualności ma tu swój odpowiednik, co pokazał Woronowicz.

Uważam, że Rozdział 3 jest znakomitym umotywowaniem chęci uogólnienia klasycznych pojęć przemiennej analizy na przypadek nieprzemienny. Pokazuje, jak bogate obszary rozwinęły się dzięki takiej idei.

Dalej, w Rozdziale 4, Autor omawia klasyczne pojęcie modułu ciągłości funkcji jednostajnie ciągłej oraz twierdzenie Arzeli-Ascolego. Na koniec Autor uzasadnia swoją motywację do badania pojęcia zwartości (przestrzeni metryzowalnych), pokazując w jaki sposób podzbiór (przestrzeni zwartej metryzowalnej) warunkowo zwarty i rozdzielajacy punkty pozwala zdefiniować metrykę zgodną z topologią wyjściową. Część 1 kończy Fakt 5.1. stwierdzający, że C^*-algebra z jednością jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy ma podzbiór zwarty generujący. Jest to narzędzie techniczne przydatne w dalszych rozważaniach.

W Rozdziale 6, rozpoczynającym Część 2, Autor wprowadza funkcję d_K (wzór (1)) na zbiorze $*$-reprezentacji $Rep(\mathcal{U})$ ośrodkowej C^*-algebry z jedynką $\mathcal{U}$, związaną z ustalonym zwartym podzbiorem $K \subset \mathcal{U}$ generującym $\mathcal{U}$. Dowodzi, że jest to metryka zupełna, że definiuje topologię identyczną z topologią punktowo-normową, oraz że każdy inny zbiór o tej własności co K definiuje metrykę jednostajnie równoważną z d_K. Autor pokazuje także, że względem tej metryki funkcje $\widehat{a}$ są jednostajnie ciągłe na $Rep(\mathcal{U})$. Dalej konstruowany jest moduł ciągłości ω_a^K dla elementu $a \in \mathcal{U}$

$$\omega_a^K := \inf\{\omega(t) : \omega \geq f_a^K, \omega \in \Omega\}, \tag{2}$$

gdzie Ω jest zbiorem funkcji ciągłych, wklęsłych, nieujemnych i niemalejących na $[0, \infty)$, spełniających $\omega(0) = 0$, natomiast dla $t \geq 0$

$$f_a^K(t) := \sup\{\|\widehat{a}(\pi) - \widehat{a}(\pi')\| : \pi, \pi' \in Rep(\mathcal{U}), d_K(\pi, \pi') \leq t\}. \tag{3}$$

Udowodnione są własności ω_a^K, w szczególności to, iż pokrywa się on z (minimalnym) modułem ciągłości $\omega_{\widehat{a}}^K$ funkcji $\widehat{a}$.

W kolejnym Rozdziale wprowadzona jest Definicja 7.1 **zwartości** C^*-algebry $\mathcal{U}$ jako zwartość przestrzeni $\Sigma(\mathcal{U})$ wszystkich *nieprzywiedlnych* $*$-reprezentacji $\mathcal{U}$ (właściwie to nieprzywiedlnych nieskoń-czenie wymiarowych oraz przeliczalnych sum prostych nieprzywiedlnych skończenie wymiarowych). Rozdział 7 zawiera omówienie własności tego pojęcia (wraz z ich dowodami), w szcególności Autor pokazuje, że

1. obraz $*$-epimorficzny zwartej C^*-algebry jest zwarty;
2. C^*-algebra ilorazowa $\mathcal{U}/\mathcal{J}$ zwartej C^*-algebry $\mathcal{U}$ (przez ideał $\mathcal{J}$) jest zwarta;
3. ideał w zwartej C^*-algebrze też jest zwarty;
4. C^*-algebry N-podjednorodne są zwarte;
5. C^*-algebry kurczące są zwarte.

Ponadto udowodniona jest ciekawa własność C^*-algebr zwartych (Tw. 7.20): każda ich reprezentacja nieprzywiedlna jest skończenie wymiarowa. Nie jest to jednak warunek konieczny, co jest omówione dalej.

Następnie wprowadzona zostaje Definicja 7.11 **własności Ascolego** dla C^*-algebry $\mathcal{U}$: dowolny jej podzbiór $L \subset \mathcal{U}$ jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest ograniczony, jednakowo ciągły i punktowo warunkowo zwarty. Pokazane jest, że własność ta jest zachowana przez sumę prostą.

Jeśli do warunkowej zwartości dowolnego $L \subset \mathcal{U}$ wystarczają tylko ograniczoność i jednakowa ciągłość, to Autor nazywa to **silną własnością Ascolego** i pokazuje (Tw. 7.27) że zwarte C^*-algebry mają tą własność.

Interesujące w tym Rozdziale są dyskusje przykładów, ilustrujących zdefiniowane w nim własności. Autor pokazuje, że własności Ascolego nie pociąga za sobą zwartości. Pokazuje to Przykład 7.13 (2) C^*-algebry $\mathcal{K}(l^2)^+$ operatorów zwartych na l^2 (z dołączonym operatorem identycznościowym). Podobnie zachowuje się algebra nieprzemiennego torusa (ang.*irrational rotation algebra*) A_θ, zdefiniowana przez relację komutacji $uv = e^{2\pi i\theta}vu$ dwóch elementów unitarnych, gdzie θ jest liczbą niewymierną.

W innym Przykładzie 7.23 konstruuje przykład C^*-algebry $\mathcal{U}$, której wszystkie nieprzywiedlne $*$-reprezentacje są skończenie wymiarowe, jednak ona sama nie jest zwarta.

Pod koniec Rozdziału 7 Autor wprowadza pojęcie **jednostajnej zbieżności** $a_s \to a$ elementów C^*-algebry $\mathcal{U}$, jako zbieżności odpowiadających im funkcji $\widehat{a_s} \Rightarrow \widehat{a}$ jednostajnej na $\Sigma(\mathcal{U})$. Zbieżność ta okazuje się być równoważna zbieżności w normie $\|a_s - a\| \to 0$ (Tw. 7.37).

Rozdział 8 zawiera rozważania dwóch pojęć **jednostajnej ciągłości $*$-homomorfizmów** $\alpha : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ dwóch C^*-algebr: jednego wprowadzonego przy pomocy nierówności dla odpowiednich modułów ciągłości i drugiego, nieco bardziej naturalnego, odwołującego się do jednostajnej ciągłości funkcji $Rep(\mathcal{U}_2) \ni \pi \mapsto \pi \circ \alpha \in Rep(\mathcal{U}_1)$. Oba pojęcia zdefiniowane są w zależności od ustalonych zbiorów zwartych generujących te algebry, lecz de facto nie zależą od ich konkretnego wyboru. W dalszej części rozważana jest własność Ascolego na zbiorze $Hom(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ $*$-homomorfizmów ośrodkowych C^*-algebr jedynkami. Podobnie jak poprzednio definiuje się metrykę d_K na tym zbiorze (zależną od zwartego podzbioru K generującego $\mathcal{U}_1$), która okazuje się metryzować zarówno topologię punktowo-normową jak i topologię zbieżności niemal jednostajnej. Dla podzbioru $\mathcal{F} \subset Hom(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ pokazane są trzy ciekawe własności:

1. $\mathcal{F}$ jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego elementu $a \in \mathcal{U}_1$ jego orbita $\mathcal{F}(a)$ jest warunkowo zwarta w $\mathcal{U}_2$;

2. (zakładając, że $\mathcal{U}_2$ ma własność Ascolego) $\mathcal{F}$ jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego elementu $a \in \mathcal{U}_1$ jego orbita $\mathcal{F}(a)$ jest zbiorem ograniczonym, jednakowo ciągłym i punktowo warunkowo zwartym;

3. (zakładając, że $\mathcal{U}_2$ ma silną własność Ascolego) $\mathcal{F}$ jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego elementu $a \in \mathcal{U}_1$ jego orbita $\mathcal{F}(a)$ jest zbiorem ograniczonym i jednakowo ciągłym.

W Rozdziale 9 dla przypadku przemiennego $\mathcal{U} = C(X)$, porównywany jest moduł ciągłości $\omega_f^{Rep(\mathcal{U})}$ funkcji $f \in C(X$, zdefiniowany wzorami (2) i (3) z modułem $\omega_f^{\Sigma(\mathcal{U})}$ zdefiniowanym analogicznie z zastąpieniem zbioru wszystkich $*$-reprezentacji $Rep(\mathcal{U})$ przez zbiór $*$-reprezentacji nieprzywiedlnych $\Sigma(\mathcal{U})$. Pokazane jest, że dla funkcji ciągłej rzeczywistej $f : X \mapsto \mathbb{R}$ zachodzi równość tych modułów, przy czym dowód tego faktu wykorzystuje transformatę Fechnela funkcji na przestrzeni Euklidesowej E

$$f^*(x) := \sup_{y \in E}(\langle x, y\rangle - f(y)),$$

charakteryzację warunku $f = f^{**}$ (podaną w Twierdzeniu 9.1) oraz dosyć subtelne szacowania związane z badaniem odległości (w normie supremum na $C(X)$) danej funkcji f od funkcji spełniających warunek Lipschitza ze stałą nie większą, niż ustalona liczba s. Dla przypadku zespolonego jest tylko pokazana łatwa nierówność $\omega_f^{\Sigma(\mathcal{U})} \leq \omega_f^{Rep(\mathcal{U})} \leq 2\omega_f^{\Sigma(\mathcal{U})}$, nie ma jednak kontrprzykładu. Na koniec tego Rozdział Aotur omawia naturalne utożsamienie zbioru $(\mathcal{U})$ w przypadku przemiennym $\mathcal{U} = C(X)$ z przestrzenią miar spektralnych na X.

Rozdział 10 kończy Rozprawę rozważaniami na temat możliwych dalszych badań w rozważanej problematyce. Całkiem naturalne jest w szczególności pytanie (Problem 10.1) czy C^*-podalgebra algebry zwartej musi być zwarta. Warto, aby Autor spróbował znaleźć na nie odpowiedź - jeśli byłaby negatywna, to byłoby to ciekawie zaskakujące - odpowiedź pozytywna byłaby "zgodna z oczekiwaniami".

3 Uwagi

W swojej Rozprawie mgr A. Wegert zamieścił sporo pojęć, własności i przykładów dotyczących swojej koncepcji jednostajności dla C^*-algebr. Większość z nich zawiera pełne szczegółowe dowody, wymagające od Autora znajomości technik algebr operatorowych, teorii reprezentacji czy ogólnej topologii metrycznej. Widać w nich dobry warsztat matematyczny i wiedzę Autora, co daje jasny i ze wszech miar pozytywny obraz jego kompetencji i kwalifikacji matematycznych.

Praca jest zredagowana w sposób pozwalający na jej wygodne czytanie. Występuje kilka drobnych niedociągnięć (np. niedokończone zdanie na str. 16 w linii 14, brak założenia ciągłości funkcji f w określeniu zbioru E na str. 27, wielkość indeksu dolnego: d_k zamiast d_K na początku dowodu Faktu 6.1 str. 29, brak formalnej definicji zbioru $Irr(\mathcal{U})$ ze str. 41, zmieniona czcionka w nazwach "Twierdzenie" 7.18 i 7.19 (kursywa zamiast pogrubienia), użycie niepoprawnej formy "możnaby" zamiast "można by" na str. 48), ale są to drobiazgi bez większego znaczenia dla całości Rozprawy doktorskiej.

4 Podsumowanie

Rozprawa mgr Adama Wegerta jest w moim przekonaniu bardzo dobrym wstępem koncepcyjym do badania C^*-algebr z punktu widzenia topologicznych własności ich reprezentacji i mam nadzieję, że badania te będą dalej rozwijane, gdyż byłoby ciekawe zobaczyć czy proponowanymi metodami można zbliżyć się do jakiś ich trudniejszyc własności, typu średniowalność (= amenability), własność Kazhdana dla C^*-algebr grupowych, własności aproksymacyjne, badanie AF-algebr (domknięcia sumy przeliczalnej wstępującej rodziny algebr skończonych).

Podsumowując stwierdzam, że w przedłożonej rozprawie doktorskiej Autor pokazał, że ma potencjał do prowadzenia badań naukowych, potrafi (częściowo zapewne z pomocą Promotora) stawiać problemy matematyczne i je rozwiązywać, nie lęka się podejmować badań rozwijających – w jakimś sensie nową i niezbyt modną aktualnie – tematykę. Nie mam wątpliwości, że ngr Adam Wegert zasługuje na uzyskanie tytułu doktora nauk matematycznych.

Uważam, że spełnione są wymagania ustawowe i w związku z tym wnioskuję o dopuszczenie Pana mgr Adama Wegerta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Janusz Wysoczański