UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Umultowska 87 61–614 Poznań

Tel: +48 61 829 53 11 Fax: +48 61 829 53 15 E-mail: wmiuam@amu.edu.pl

Poznań, 24 października 2015 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Adama Wegerta
pt. „Koncepcja jednostajności w C^*-algebrach"

Praca doktorska Pana Adama Wegerta dotyczy struktury jednostajnej na zbiorze reprezentacji ośrodkowych C^*-algebr. Definicja struktutry jednostajnej, a właściwie struktury przestrzeni metrycznej, na zbiorze reprezentacji ośrodkowej C^*-algebry jest oryginalnym pomysłem Autora. U podstaw stworzenia tego pojęcia leży fakt, że $\mathcal{A}$ jest ośrodkową C^*-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest generowane (jako C^*-algebra) przez zbiór zwarty.

Klasyczne twierdzenie Gelfanda-Najmarka mówiące o tym, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zwartymi przestrzeniami topologicznymi a przemiennym C^*-algebrami z jedynką, pozwala interpretować różne własności topologiczne przestrzeni w języku (niekoniecznie przemiennych) C^*-algebr. To daje możliwość rozpatrywania elementów C^*-algebry jako funkcji ciągłych na „nieprzemiennej" przestrzeni topologicznej i pozwala myśleć o teorii C^*-algebr jako o „nieprzemiennej" topologii.

Autor postawił sobie za cel wykazanie, że pojęcie struktury jednostajnej można zinterpretować w języku C^*-algebr w duchu przedstawionej powyżej filozofii.

Omówię pokrótce treść pracy doktorskiej Pana Wegerta. Praca podzielona jest na dwie części. Część pierwsza składa się ze wstępu i pięciu rozdziałów. Pierwszy rozdział zatytułowany „Preliminaria" zawiera podstawowe definicje i oznaczenia stosowane w dalszym ciągu.

W rozdziale drugim „Podstawy C^*-algebr" omówione są przemienne C^*-algebry, w szczególności wskazana jest interpretacja pojęć topologicznych z języku C^*-algebr, a następnie przedstawione są podstawowe klasy C^*-algebr, które będą badane w pracy. Są to algebry n-jednorodne, n-podjednorodne, kurczące (*shrinking* w języku angielskim), rezydualnie skończenie wymiarowe i CCR-algebry.

Rozdział kolejny, trzeci, zatytułowany „Algebra vs. Geometria" zawiera przegląd wielu różnych dziedzin matematyki zawierających pojęcia o charakterze geometrycznym, które można interpretować w języku algebraicznym. Przegląd ten jest bardzo szeroki od topologii poczynając, poprzez logikę i teorię mnogości, teorię miary, teorię grup, analizę, na geometri różniczkowej kończąc. Lektura tego rozdziału pokazuje

bardzo szeroką wiedzę Pana Wegerta na temat wielu, czasami bardzo zaawansowanych, teorii matematycznych.

W rozdziale czwartym o tytule „Moduły ciągłości", zdefiniowane jest pojęcie modułu jednostajnej ciągłości i omówione są jego podstawowe własności. Pojęcie to odgrywa istotną rolę w dalszej części rozprawy. Następnie przypomniane jest twierdzenie Ascoliego-Arzeli i jego związki ze zbieżnością w przestrzeniach funkcji ciągłych.

Rozdział piąty, ostatni w części pierwszej rozprawy, zatytułowny jest „Motywacja". W nim Autor pokazuje jak za pomocą funkcji nieoddalających określonych na zwartej przestrzeni metryzowalnej definiuje się metrykę zgodną z wyjściową topologią tej przestrzeni, a następnie udowadnia wspomniany na początku mojej recenzji fakt, który mówi, że C^*-algebra z jedynką jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona generowana przez zbiór zwarty.

Zasadniczą częścią rozprawy jest jej część druga. Jest ona podzielona na pięć rozdziałów. Pierwszy z nich o tytule „Struktura jednostajna na zbiorze reprezentacji" zawiera definicję metryki na zbiorze $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ $*$-reprezentacji ośrodkowej C^*-algebry z jedynką na przestrzeni $\mathcal{B}(\ell_2)$. Metryka ta jest zdefiniowana za pomocą zbioru zwartego K generującego algebrę $\mathcal{A}$. Autor dowodzi, że w istocie metryka ta nie zależy od tego zbioru, tzn. udowadnia, że metryki pochodzące od dwóch takich zbiorów są jednostajnie równoważne. Ponadto wykazuje, że przestrzeń $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ z tą metryką jest zupełna oraz, że topologia generowana przez tę metrykę pokrywa się z topologiami punktowo-normową i zwarto-otwartą. W rozdziale tym zdefiniowane jest również pojęcie jednakowej ciągłości dla podzbiorów C^*-algebry oraz moduł ciągłości, który pozwala badać tę jednostajną ciągłość.

W kolejnym rozdziale zatytułowanym „Zwartość oraz własność Ascoliego" pojawia się pojęcie zwartej C^*-algebry, a więc takiej C^*-algebry $\mathcal{A}$, dla której przestrzeń $\Sigma(\mathcal{A})$, będąca domknięciem zbioru wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\mathcal{A}$ w przestrzeni $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$, jest przestrzenią zwartą. Przestrzeń $\Sigma(\mathcal{A})$ jest odpowiednikiem przestrzeni Gelfanda dla przemiennych C^*-algebr z jedynką.

Następnie badane są własności algebr zwartych. W szczególności Autor wykazuje, że do tej klasy C^*-algebr należą algebry n-podjednorodne i algebry kurczące. W tym rozdziale zdefiniowane są również własność Ascoliego i silna własność Ascoliego dla C^*-algebr oraz zbadane związki tych pojęć ze zwartością algebry. Ponadto zawarte są w nim pewne fakty dotyczące różnych rodzajów zbieżności elementów C^*-algebr.

Następny rozdział zatytułowany jest „Jednostajna ciągłość morfizmów". Są w nim zdefiniowane dwa pojęcia jednostajnej ciągłości morfizmów ośrodkowych C^*-algebr z jedynką. Udowadnia się, że są one równoważne oraz, że $*$-homomorfizm pomiędzy takimi algebrami jest jednostajnie ciągły. Jest to nieprzemienny odpowiednik klasycznego twierdzenia mówiącego, że ciągłe odwzorowanie przekształcające przestrzeń zwartą w przestrzeń metryczną jest jednostajnie ciągłe. Na zbiorze wszystkich $*$-homorfizmów pomiędzy ośrodkowymi C^*-algebrami wprowadza się metrykę w podobny sposób jak na zbiorze reprezentacji i udowadnia, że topologia wyznaczona przez tę metrykę jest identyczna z topologią zbieżności punktowo-normowej i topo-

logią zbieżności niemal jednostajnej. Udowodnione jest również twierdzenie będące odpowiednikiem twierdzenia Ascoliego-Arzeli.

Rozdział kolejny nosi nazwę „Dodatek”. Zawiera on porównanie modułów ciągłości względem przestrzeni $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ i $\Sigma(\mathcal{A})$ oraz interpretację $\mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ za pomocą miar spektralnych w przypadku, gdy $\mathcal{A}$ jest przemienną C^*-algebrą z jedynką.

W końcu bardzo krótki rozdział ostatni o tytule „Do dalszych rozważań” zawiera listę pytań otwartych dotyczących problematyki rozważanej w pracy, na które zdaniem Autora warto byłoby odpowiedzieć.

Przejdę teraz do oceny rozprawy doktorskiej. Rozprawa napisana jest jasno, zwięźle i poprawnie. Nie zauważyłem żadnych błędów merytorycznych.

Mam następujące uwagi redakcyjne i językowe:

— Autor nie zawsze używa akapitów, przez co miejscami pracę trudno się czyta.
— Symbol jest rodzaju nijakiego i dlatego powinno się pisać np. „Wreszcie f_L^K jest niemalejące” albo „Wreszcie funkcja f_L^K jest niemalejąca”, a nie „Wreszcie f_L^K jest niemalejąca” (str. 34^8). Tej zasady często Autor nie przestrzega.

Na osobnych kartkach dołączyłem listę drobnych błędów językowych i drukarskich.

Oczywiście te uwagi redakcyjne i językowe są nieistotne i nie mają wpływu na ocenę pracy.

Moja ocena rozprawy Pana mgra Adama Wegerta jest bardzo pozytywna. Wyniki uzyskane przez Autora są, moim zdaniem, wartościowe i interesujące. Problemy rozważane w pracy wpisują się w bardzo aktualny nurt badań w teorii C^*-algebr polegający na rozwijaniu nieprzemiennych odpowiedników klasycznych teorii tj. nieprzemienna geometria, nieprzemienna teoria miary, nieprzemienna probabilistyka itd. Autorowi udało się stworzyć „nieprzemienny” odpowiednik teorii przestrzeni metrycznych, co jest z pewnością Jego oryginalnym wkładem w teorię C^*-algebr. Wykazał się przy tym bardzo dobrą znajomością literatury i doskonałym opanowaniem „rzemiosła”.

Biorąc powyższe pod uwagę, stwierdzam, że **praca doktorska Pana mgra Adama Wegerta spełnia wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim w art. 13 ust. 1 ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym z dn. 14 marca 2003 r. (Dz.U. Nr 65, poz. 595, z późniejszymi zmianami)** i wnoszę o dopuszczenie jej do publicznej obrony.

Na zakończenie chciałbym dodać, że moim zdaniem, rozprawa ta zasługuje na wyróżnienie.

Andrzej Sołtysiak

Dr hab. Andrzej Sołtysiak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza

Andrzej Sołtysiak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza

Lista zauważonych błędów drukarskich i językowych w rozprawie doktorskiej mgra Adama Wegerta

strona, wiersz	*jest*	*powinno być*
3_{16}	przy pomocy	za pomocą
$312, 11$	definicja opiera się o strukturę	definicja wykorzystuje strukturę
5^{10}	$x^*x = xx^x = 1$	$x^*x = xx^* = 1$
11_4	conajmniej	co najmniej
12^{14}	Gdy istnieje $n \in \mathbb{N}$, że $\mathfrak{A}$	Gdy istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathfrak{A}$
14_1	Wciąz	Wciąż
16^{11}	odróznieniu	odróżnieniu
16^{14}	nie prowadzą do nieprzemien	nie prowadzą do nieprzemiennych C^*-algebr.
16_{18}	porządku Murraya von Neumanna	porządku Murraya-von Neumanna
16_{12}	porządek Murraya von-Neumanna	porządek Murraya-von Neumanna
17, przypisy	Brak kropki na końcu zdania.	
18, przypisy	Brak kropki na końcu zdania.	
20^{14}	ustala izomorfizm: tzn. naturalne	ustala izomorfizm, tzn. naturalne
21^5	między K-teoria	między K-teorią
23, przypisy	Brak kropki na końcu zdania.	
23^{10}	odwtorzyć	odtworzyć
24_{16}	i spełnia warunek, że	i spełnia warunek mówiący o tym, że
24, przypisy	można zawsze	Można zawsze
24, przypisy	Brak kropki na końcu zdania.	
26_{21}	jedostajnie ciągła	jednostajnie ciągła
27^2	conajmniej	co najmniej
30_6	$d_K(\pi_n, \pi) < \varepsilon.$	$d_K(\pi_n, \pi) \leqslant \varepsilon.$
31_1	Mamy kolejno, że	Mamy kolejno:
33_{15}	istnieje $\delta > 0$, że	istnieje $\delta > 0$ takie, że
33_8	$\lVert a' - a_i \rVert + \lVert a_i' - x_i \rVert$	$\lVert a' - a_i \rVert + \lVert a_i - x_i \rVert$
$34^{4,5}$	istnieje $\delta > 0$, że dla dowolnych $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathcal{A})$, takich że $d_K(\pi, \pi') < \delta$, zachodzi	istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnych $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\mathcal{A})$, jeżeli $d_K(\pi, \pi') < \delta$, to
36^{13}	$\pi'(\cdot) := U^*\pi(\cdot)U$ gdzie	$\pi'(\cdot) := U^*\pi(\cdot)U$, gdzie
37^{16}	rowniež	również

Lista zauważonych błędów drukarskich i językowych w rozprawie doktorskiej mgra Adama Wegerta, cd.

strona, wiersz	*jest*	*powinno być*
38_{15}	Stąd dostajemy $d_K(\pi(x),\pi(y)) \geqslant 1$, skąd reprezentacje	Stąd $d_K(\pi(x),\pi(y)) \geqslant 1$, co implikuje, że reprezentacje
39_{11}	jest to ciągłe	jest ono ciągłe
$40_{13,11}$	zwartośc	zwartość
41, przypisy	mówiąć	mówiąc
43^{14}	Niech S jest operatorem	Niech S będzie operatorem
44^{1}	istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$, taka że	istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$ takie, że
44_{16}	jest ciagłe	jest ciągłe
45^{8}	$\{T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})\colon T$ jest izometrią$\}$	$\{T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})\colon T$ jest izometrią$\}$
46^{3}	Duzo	Dużo
58, przypisy	Brak kropki na końcu zdania.	
59_{3}	półtora-liniowa	półtoraliniowa
61_{22}	wydaja	wydają
62^{6}	conajwyżej	co najwyżej
62^{9}	nie będące	niebędące
63^{2}	*The structure of algebrs of*	*The structure of algebras of*
63^{4}	*Measure theory volume 2,*	*Measure theory, volume 2,*
63^{4}	*Measure theory volume 3,*	*Measure theory, volume 3,*
63_{2}	*on Chouquet's theorem*	*on Choquet's theorem*
64^{6}	*Funcional Analysis*	*Analiza funkcjonalna*