AGH

Dr hab. Piotr Oprocha, prof. nadzw.
Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Matematyki Stosowanej
al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
e-mail: oprocha@agh.edu.pl

Kraków, 12 listopada 2015

RECENZJA

rozprawy doktorskiej **mgra Karola Gryszki** zatytułowanej
„Trajektorie Asymptotycznie Okresowe w Ciągłych Układach Dynamicznych"

Rozprawa doktorska mgra Karola Gryszki, będąca przedmiotem tej recenzji, składa się z 55 stron (plus dodatkowe strony i–vi) i podzielona została na 4 rozdziały. Zawiera dodatkowo streszczenie (j. polski i j. angielski), spis treści, spis rysunków oraz bibliografię. Praca została napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Klaudiusza Wójcika. Rozprawa napisana jest w języku polskim, a dotyczy topologicznych własności potoków (tzn. układów dynamicznych z czasem $\mathbb{R}$) i semi-potoków (tzn. układów dynamicznych z czasem $\mathbb{R}_+$) na przestrzeniach metrycznych. W niektórych miejscach rozważa się także szczególny przypadek lokalnych potoków. Głównym pojęciem przewijającym się przez wszystkie rozdziały jest tak zwany okres asymptotyczny, natomiast przestrzeń X jest w większości przypadków lokalnie zwarta czy właściwa (przestrzeń w której wszystkie kule domknięte są zwarte).

Rozdział pierwszy przybliża podstawowe pojęcia z teorii ciągłych układów dynamicznych pojawiające się później w pracy. Między innymi pojawia się tam definicja układu dynamicznego, orbity, punktu okresowego, zbioru niezmienniczego i minimalnego. Autor definiuje tutaj także okres asymptotyczny $AP(x)$ punktu x, który jest jednym z kluczowych pojęć rozprawy.

W rozdziale drugim analizowane są podstawowe związki okresu asymptotycznego z trajektoriami okresowymi. Rozważania prowadzone są w większości na właściwych przestrzeniach metrycznych. Pojawia się tutaj charakteryzacja sytuacji $\mathrm{AP}(x) = 0$ oraz omówione są własności zbioru granicznego $\omega(x)$ wymuszające $\mathrm{AP}(x) = +\infty$. Pojawia się przykład, że w przypadku $\mathrm{AP}(x) = +\infty$ dynamika na zbiorze $\omega(x)$ może być zupełnie inna. W dalszej części tego rozdziału autor porównuje związki pomiędzy skończoną wartością $AP(x)$ a wprowadzoną w pracy [P] asymptotyczną okresowością.

W rozdziale 3 autor skupia się nad związkami między skończoną wartością $AP(x)$ a zwartością i spójnością zbioru granicznego $\omega(x)$. Rozdział zawiera przykład, że dla lokalnego potoku na przestrzeni lokalnie zwartej może zajść sytuacja w której $AP(x)$ przyjmuje wartość skończoną, ale $\omega(x)$ jest zbiorem niespójnym i niezwartym (choć niepustym). Następnie autor udowadnia, że gdy przestrzeń jest właściwa (czyli istotnie została wzmocniona lokalna zwartość) to z tego, że $AP(x) < +\infty$ wynika, że $\omega(x)$ jest niepusty, zwarty i spójny a $\omega(x)$ zawiera dokładnie jeden zbiór minimalny. Wykazuje także, że orbita x jest przyciągana przez $\omega(x)$ w tej sytuacji. Na zakończenie autor podaje jak elementy zaczerpnięte z teorii punktów stałych (charakterystyka Eulera, własność punktu stałego) mogą pomóc stwierdzeniu, że $AP(x) = +\infty$.

Rozdział 4 zawiera konstrukcję potoków równoważnych pozwalającą kontrolować tempo wzrostu orbit okresowych oraz orbit istotnie asymptotycznie okresowych (liczby $p(\phi)$ oraz $p_{EAP}(\phi)$). Autor dowodzi, że dla układów równoważnych może się zdarzyć, że wartości $p(\phi)$ oraz $p_{EAP}(\phi)$ dowolnie się różnią (Twierdzenie 4.3.6) rozszerzając w ten sposób idee pochodzące z [SZ]. Wykazuje także, że wartość entropii można w tych przykładach podnieść dowolnie w górę, aż do $+\infty$.

Autorowi niestety nie udało się uniknąć pewnych usterek redakcyjnych. Część z nich wpływa niestety na poprawność merytoryczną pracy i z tego powodu należało by je usunąć z wersji finalnej rozprawy. Odnosi się wrażenie jakby pewne fragmenty tekstu były pisane w pośpiechu.

(1) Do definicji potoków równoważnych wkradł się istotny błąd. Zazwyczaj definicja przewiduje, że istnieje homeomorfizm $h\colon X \to Y$ przenoszący trajektorię potoku ϕ na ψ (działających, odpowiednio na X i Y), to znaczy

$$\{\phi(x,t) : t \in \mathbb{R}\} = \{h^{-1}(\psi(h(x),t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

dla wszystkich x z przestrzeni fazowej X na której działa ϕ. Autor przedstawia podobny opis definicji równoważności, a potem dodaje, że oznacza to, że istniejeciągła reparametryzacja czasu $\alpha\colon \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ taka, że $\phi(\alpha(t,x), h(x)) = h(\psi(t,x))$ i dla wszystkich x funkcja $t \mapsto \alpha(t,x)$ jest rosnącym homeomorfizmem. Istnieją co prawda tego typu charakteryzacje[1], jednak wyprowadzona w nich funkcja α działa (i jest ciągła) na zbiorze[2] $X \setminus X_0$ gdzie X_0 jest zbiorem punktów stacjonarnych potoku ϕ. Aby zobaczyć, że jest to warunek konieczny, rozważmy ciąg koncentrycznych okręgów o środkach w $(0,0)$ i promieniach $1/n$ uzwarcony punktem $(0,0)$. Jeśli rozważamy na nich obroty $(r_n \cos(\alpha_n t), r_n \sin(\alpha_n t))$ wraz z punktem stacjonarnym w $(0,0)$, to bez względu na dobór ciągu prędkości α_n zawsze uzyskamy układy równoważne. Tymczasem, jeśli w jednym układzie $\alpha_n \to \infty$ a w drugim $\alpha_n \to 0$ to nie uda nam się uzyskać funkcji ciągłej $\alpha\colon \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ (na homeomorfizm h mamy naturalnego kandydata $h(x) = x$) tak by dla wszystkich x funkcja $t \mapsto \alpha(t,x)$ była rosnącym homeomorfizmem. Po porostu w punkcie $x = (0,0)$ nie uda nam się uzyskać rosnącego homeomorfizmu przy jednoczesnym utrzymaniu ciągłości α.

(2) Dowód Lematu 2.1.1 nie ma sensu.Pojawia się w nim symbol ${}_1t$, brak opisu wyboru t_1 itd. Czytelnik odnosi wrażenie, że część dowodu z jakiegoś powodu wypadła na etapie edycji, lub wydrukowano jego jakąś wcześniejszą, częściową wersję. Sam dowód natomiast jest raczej standardowy i jego uzupełnienie nie powinno stanowić większego problemu.

(3) W dowodzie twierdzenia 2.2.2. wybór podciągu t_n takiego, że $\limsup_{n\to\infty} W(\phi(t_n,x),\varepsilon) < T + \delta$ w sytuacji gdy $\limsup_{t\to\infty} W(\phi(t,x),\varepsilon) < T + \delta$ chyba nie ma za wiele sensu. Stwierdzenie linijkę niżej mówiące, że „Bez straty ogólności (Lemat 2.1.1) możemy założyć..." nie jest do końca zrozumiałe. Chyba lepiej, korzystając z definicji zbioru $\omega(x)$ założyć, wybierając ciąg t_n, że $B(\phi(t_n,x)) \cap o(y) \neq \emptyset$.

(4) O ile idea przykładu 2.3.10 wydaje się poprawna, o tyla sama realizacja już nie. W konstrukcji wykorzystuje się czasy powrotu na odcinek S przez punkt x poruszający się ze stałą prędkością kątową. Kolejne czasy powrotu zadają rozkład S na odcinki I_k o rozłącznych wnętrzach. Następnie zastępuje się $v' = 1$ zmienną prędkością kątową $v' = \theta(r)$ nad każdym z odcinków I_k. Zwróćmy uwagę, że jeśli trajektoria punktu x

[1] Patrz np. [O] z bibliografi rozprawy.

[2] Por. także Lemat 4.1.9. w dalszej części rozprawy.

(w nowo stworzonym układzie dynamicznym) przetnie S w przedziale I_k oraz liczby a_i dla $i = k-2,\dots,k+n+2$ będą małe, powiedzmy $a_i < 1/20\pi$ to $b_i < 1/10$ oraz $c_i < 1/10$ dla $i = k,\dots,n$ a zatem $v' = \theta(r) < 1/10$ dla $r \in \cup_{i=k}^{k+n} I_k$. Ale jeśli $r(t_0) \in I_k$ to z wyboru tych przedziałów (ruch $r(t)$ i $v(t)$ odbywa się niezależnie) wynika że $r(t)$ nie opuści przedziału $\cup_{i=k}^{k+n} I_k$ dla $t \in [t_0, t_0+n-1]$. Z drugiej strony, jeśli $n > 10$ to czas ponownego powrotu na S będzie większy niż 10. Stąd nie jest prawdą, że $(p_i, q_i) < 2\pi + C\varepsilon$ dla dużych i bo sytuacja powyższa może powtórzyć się nieskończenie wiele razy. Wydaje się, że prędkością na przedziałach I_k należy tak sterować aby czas powrotu wynosił zawsze 2π, natomiast prędkość kątowa na pewnych przedziałach fluktuowała, pomiędzy bardzo dużą i bardzo małą prędkością. Należy przy tym uważać, aby w kolejnych przedziałach I_k zmiany nie były zbyt gwałtowne, bo do obliczenia $AP(x)$ używamy także punktów $\phi(t,x)$ dla czasów t w których $\phi(t,x) \notin S$.

(5) Twierdzenie 3.2.4. jest oczywistą obserwacją. Jeśli $\overline{o^+(x)}$ jest ograniczony a X jest właściwa, to wprost z definicji przestrzeni właściwej $\overline{o^+(x)}$ jest zwarty jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. Na tej samej zasadzie, Twierdzenie 3.2.7. jest natychmiastową konsekwencją Twierdzenia 3.2.8.

(6) Dowód Twierdzenia 3.2.9. jest w dużym stopniu standardowy i zbyt długi. Na mocy Twierdzenia 3.2.8. zbiór $\overline{o^+(x)}$ jest ograniczony, zatem $\omega(x)$ jest zbiorem zwartym jako domknięty podzbiór zbioru zwartego $\overline{o^+(x)}$. Teraz wystaczy skorzystać z Lematu 3.1.1(iv) otrzymując spójność $\omega(x)$. Równie dobrze można też skorzystać z Twierdzenia 3.2.2. które autor przytacza za [BS].

(7) Lemat 3.2.1. jest powtórzeniem bardziej ogólnego Lematu 2.1.1. z poprzedniego rozdziału.

(8) Nie jest jasne po co w Twierdzeniu 3.3.5 zakładamy, że S jest ENR-em.

(9) W dowodzie Twierdzenia 3.3.5. należało by się zdecydować, czy chcemy skorzystać z tego, że każde ϕ_t ma punkt stały w S (i na tej podstawie wnioskować, że w S musi być punkt stacjonarny), czy też skorzystać ze słabej własności punktu stałego i odnieść się do Twierdzenia 3.3.5.

(10) Warto umieścić uwagę, że jeśli istnieje rozkład $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ na zbiory niezmiennicze X_i to $p(\xi) = \max_{i=1}^n p(\xi|_{X_i})$. Wykorzystujemy ten fakt w dowodzie twierdzenia 4.3.6 bez żadnego komentarza.

(11) Jeśli już dokładnie opisujemy konstrukcję z [O], to należało by skomentować dlaczego układ (Z,σ) z dowodu twierdzenia 4.1.10 nie ma punktów okresowych (wynika to z warunku (1), lub bardziej ogólnego faktu, że każdy układ proksymalny zawiera punkt stały jako jedyny podzbiór minimalny[3]).

Praca zawiera także kilka drobniejszych niedociągnięć. Pozwolę sobie przedstawić część z nich:

— 5^1: Zadnie „W klasie takich zbiorów..." jest powtórzone.

— 5^{12}: Powinno być: „W X zawarty jest..."

— Jeśli w Obserwacji 1.2.17 zadajemy sobie trud z dowodem, to powinna także zostać dodana obserwacja, że jeśli A jest zwarty, to także zbiór $\bar{B}(A,r) = \{x : d(x,A) \leqslant r\}$ jest zwarty w przestrzeni właściwej. W dalszej części pracy ten fakt jest używany.

— Uwaga 2.1.3. podaje, że właściwość przestrzeni X w Lemacie 2.1.3. można osłabić, wymagając jedynie lokalnej zwartości oraz powołuje się na [BS,NS]. Czemu zatem nie

[3] Patrz np.Proposition 2.2 w: Akin, Ethan; Kolyada, Sergii. Li-Yorke sensitivity. Nonlinearity 16 (2003), no. 4, 1421–1433

prowadzimy dowodu dla tych założeń. Nie jest jasne także czemu dowodzimy ten fakt w pracy, skoro uwaga sugeruje, że można go znaleźć w literaturze.

— 13_9: Co oznacza $\limsup_{t \geqslant s_0} w_t$?

— 16_3: Powinno być $AP(x) < +\infty$.

— Definicja 2.3.2: zazwyczaj w literaturze warunek ten nazywa się *jednostajnym powracaniem*[4] aby odróżnić go od powracania, które nie wymusza stałego górnego ograniczenia na czas powrotu i w związku z tym nie prowadzi do dynamiki minimalnej.

— 20_8: Powinno być I_k^r zamiast I_k^m.

— 21_3: Wyraz "odpowiada" jest nadmiarowy.

— W przykładzie 3.1.2. zamiast dobierać odpowiednie krzywe w mniejszych kulach można było przyjąć, że dla $2 > r \geqslant 1$ dynamika jest zwykłym obrotem z prędkością $v' = 1$, oraz przyjąć zakres argumentu $I_u = (-\arccos 7/8, \arccos 7/8)$ dla punktów $u = (r, 1)$ i $u = (-r, 0)$.

— Przykład zaczynający się od 30_2 aż do Twierdzenia 3.2.9 można pominąć, gdyż ta część dowodu wynika już z Przykładu 2.3.12.

— 37_1: Powinno raczej być „gdyż $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$" a nie „gdy $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$".

— 38_5: Powinno być „$\mathfrak{U}'$ jest pokryciem otwartym X".

— 54, [GR]: w tytule oryginalnego artykułu jest "polysystems"

Wyniki naukowe uzyskane przez mgr Karola Gryszkę są oryginalne. Rozwiązane problemy posiadają różny poziom trudności i nierówną wartość matematyczną. Rozprawa została napisana niestarannie o czym świadczy wskazana, choć zapewne niepełna liczba usterek (sugeruję poprawę rozprawy w postaci erraty, jednak bez konieczności ponownej recenzji).

Art. 13 ust. 1. *ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki* stwierdza, że „Rozprawa doktorska, [...] powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub oryginalne dokonanie artystyczne oraz wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej lub artystycznej oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej". W mojej opinii przedstawiona rozprawa, pomimo wskazanych wcześniej niedociągnięć spełnia jednak te wymagania rozszerzając wiedzę na temat asymptotycznych własności trajektorii w ciągłych układach dynamicznych. **W związku z powyższym, wnioskuje o przyjęcie rozprawy doktorskiej i dopuszczenie mgra Karola Gryszki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

[4] ang. uniformly recurrent