Gdańsk, dn. 30.11.2015r.

dr hab. Joanna Janczewska
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Politechnika Gdańska
ul. G. Narutowicz 11/12
80-233 Gdańsk
e-mail: janczewska@mif.pg.gda.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgra Karola Gryszki nt.: „Trajektorie Asymptotycznie Okresowe w Ciągłych Układach Dynamicznych"

Teoria układów dynamicznych dostarcza ciekawych i istotnych problemów badawczych. Układy hamiltonowskie i zagadnienie N-ciał, dziwne atraktory w układach nieliniowych, topologiczne własności zbiorów granicznych, całkowalność układów fizycznych, to tylko niektóre z możliwych kierunków badań. W szczególności ważne jest badanie orbit okresowych (ich ilości, okresu), punktów stacjonarnych, a także orbit (homoklinicznych, heteroklinicznych) łączących te punkty.

W XX wieku pojawiły się różne uogólnienia pojęcia orbity okresowej w układach dynamicznych z czasem ciągłym. Między innymi znane są orbity powracające wprowadzone przez Birkhoffa, orbity prawie okresowe w sensie Bohra oraz orbity dodatnio asymptotycznie okresowe pochodzące od polskiego matematyka Andrzeja Pelczara. Taka problematyka ma związki na przykład z dynamiką nieba - ruchy planet są na ogół prawie okresowe.

Przedłożona mi do recenzji rozprawa doktorska poświęcona jest badaniu nowego pojęcia - okresu asymptotycznego, które zostało wprowadzone przez pana K. Gryszkę w jego publikacji: *Asymptotic Period in Dynamical Systems in Metric Spaces*, Colloq. Math. 139 (2015), 245–257.

Motywacją do badań prowadzonych przez doktoranta, o czym sam napisał, były pytania: „Jak opisać zachowanie orbit sąsiadujących z okresowymi? Jak opisać zachowanie orbit, które wykazują własności bliskie okresowym, ale takimi nie są?"

Rozdział 1. zaczyna się od krótkiego przypomnienia elementarnych pojęć z teorii ciągłych układów dynamicznych takich jak: potok, semi-potok,

potok lokalny, orbita (trajektoria) $o(x)$ punktu x, orbita dodatnia $o^+(x)$ punktu x, orbita ujemna $o^-(x)$ punktu x, punkt stacjonarny, punkt okresowy, zbiór ω-graniczny $\omega(x)$ punktu x, zbiór α-graniczny $\alpha(x)$ punktu x, zbiór niezmienniczy. Autor rozprawy przytacza również podstawowe fakty dotyczące zbiorów minimalnych (najmniejszy, niepusty, domknięty zbiór niezmienniczy). Następnie doktorant podaje definicję okresu asymptotycznego $AP(x)$ punktu (orbity). Definicja jest analityczna. Wykorzystuje pojęcie granicy i granicy górnej funkcji. Mianowicie.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a $\phi\colon [0, +\infty) \times X \to X$ semi-układem dynamicznym (semi-potokiem). Ustalmy $x \in X$ oraz $\varepsilon > 0$. Przyjmijmy, że

$$A(x, \varepsilon) = \{t \geq 0\colon d(\phi(t, x), x) > \varepsilon\}.$$

Wówczas

$$A(x, \varepsilon) = \bigcup_{i \in I} (q_i(x, \varepsilon), r_i(x, \varepsilon)),$$

gdzie zbiór indeksów I jest albo przeliczalny albo skończony ($r_i(x, \varepsilon)$ może być $+\infty$ dla pewnego i). Dla $t \geq 0$,

$$\text{(D)} \qquad w_{x,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin A(x, \varepsilon) \\ r_i(x, \varepsilon) - q_i(x, \varepsilon), & t \in (q_i(x, \varepsilon), r_i(x, \varepsilon)). \end{cases}$$

Autor rozprawy przyjmuje, że

$$AP(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{t \to +\infty} \limsup_{s \to +\infty} w_{\phi(t,x),\varepsilon}(s).$$

Okres asymptotyczny $AP(x)$ może przyjmować wartości z przedziału $[0, +\infty]$. Doktorant wprowadza następujące definicje. Jeżeli $AP(x) = 0$, to punkt x jest asymptotycznie stacjonarny. Jeżeli $AP(x) \in (0, \infty)$, to punkt x jest asymptotycznie okresowy. Natomiast, gdy $AP(x) = +\infty$, to punkt x jest asymptotycznie nieokresowy. Te nowe pojęcia są naturalnym uogólnieniem klasycznych: punktu stacjonarnego i okresowego. Łatwo też zauważyć, że jeśli punkt x jest T-okresowy i T jest okresem podstawowym, to $AP(x) = T$. Jeśli zaś x jest punktem stacjonarnym, to jest też punktem asymptotycznie stacjonarnym.

Mam jedną drobną uwagę. Ponieważ we wzorze (D) zmienną jest $t \geq 0$, to pisałabym tak jak jest w recenzji $w_{x,\varepsilon}(t)$, a nie tak jak w rozprawie $w_t(x, \varepsilon)$. Ale dobór nazewnictwa i oznaczeń jest oczywiście kwestią gustu.

W Rozdziale 2. pan K. Gryszka opisuje własności okresu asymptotycznego. Kluczowe dla wyników uzyskanych w tym i kolejnym rozdziale jest dodatkowe założenie na (X, d), że jest właściwa (t.j. kule domknięte są zwarte). Główne rezultaty: Twierdzenie 2.1.5, Twierdzenie 2.2.1 oraz Twierdzenie 2.2.2 łączą własności zbioru ω-granicznego $\omega(x)$ z wartością okresu asymptotycznego $AP(x)$. Najkrócej rzecz ujmując, zbiór $\omega(x)$ jest singletonem wtedy i tylko wtedy, gdy x jest asymptotycznie stały. Jeżeli moc zbioru $\omega(x)$ jest większa od jedności oraz zawiera on punkt stacjonarny, to punkt x nie jest asymptotycznie okresowy. Podobnie, gdy zbiór ω-graniczny punktu x zawiera dwie różne orbity o dodatniej odległości między nimi, to $AP(x) = +\infty$. Doktorant podaje też przykład potoku w $\mathbb{R}^3$ (Przykład 2.2.3), który pokazuje, że nieskończona wartość okresu asymptotycznego nie implikuje żadnej konkretnej dynamiki na zbiorze granicznym. Na razie p. K. Gryszce nie udało się uzyskać odpowiedzi na pytanie, co dzieje się ze zbiorem granicznym $\omega(x)$, gdy $AP(x) \in (0, +\infty)$.

Autor rozprawy nie bada osobno układów gradientowych. Według mnie przydałaby się jednak uwaga, że w sytuacji, gdy potok jest gradientowy, to z twierdzeń: 2.1.5 i 2.2.2 wynika, że okres asymptotyczny może przyjmować tylko dwie skrajne wartości: 0 i $+\infty$.

Ponadto, w drugim rozdziale autor bada wprowadzone przez siebie pojęcie okresu asymptotycznego w kontekście innych uogólnień pojęcia okresu. Na przykładach pokazuje brak relacji swojego pojęcia z pojęciem trajektorii powracającej, orbity prawie okresowej i orbity dodatnio asymptotycznie okresowej.

W tym miejscu chcę odnotować dwie uwagi. W Przykładzie 2.3.7 (s. 18) jest błąd drukarski w pierwszym równaniu badanego potoku. Zamiast $r' = \frac{1}{r}$ dla $r > 0$, powinno być $r' = \frac{1}{t}$ dla $t > 0$. Natomiast w Przykładzie 2.3.10 (s. 19–21), w którym autor definiuje ciągły układ dynamiczny na pierścieniu $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < |x| \leq 2\}$ wykorzystując przy tym pojęcie odwzorowania Poincaré, doktorant nieprawidłowo obliczył okres asymptotyczny dla dowolnego punktu y z orbity nawijającej się na sferę S^1. Według mnie nie wynosi on 2π, jak napisał p. K. Gryszka, tylko $+\infty$. Jednocześnie dodam, że można ten przykład zmodyfikować w taki sposób, żeby $AP(y) = 2\pi$.

W Rozdziale 3. głównym celem autora było badanie orbit asymptotycznie okresowych pod kątem topologicznych własności zbiorów granicznych. Przy założeniu, że $\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ jest potokiem na właściwej przestrzeni metrycznej (X, d) udało mu się pokazać, że jeśli punkt $x \in X$ jest asymptotycznie okresowy, to wtedy:

- x jest stabilny w sensie Lagrange'a, t.j. zbiór $\overline{o^+(x)}$ jest zwarty (Tw. 3.2.7);

- zbiór graniczny $\omega(x)$ jest spójny (Tw. 3.2.9);
- zbiór ω-graniczny punktu x przyciąga orbitę punktu x (Tw. 3.2.11).

Wymienione powyżej twierdzenia weszły w skład preprintu p. Gryszki nt.: *A Note on Fundamental Topological Properties of Limit Sets.* Jeśli natomiast x jest punktem asymptotycznie okresowym semi-potoku na właściwej przestrzeni metrycznej, to autor wykazał, że zbiór ω-graniczny tego punktu zawiera dokładnie jeden zwarty podzbiór minimalny (Tw. 3.2.14).

Ciekawe jest Twierdzenie 3.2.15, które doktorant uzyskał jako prosty wniosek z twierdzenia Poincaré-Bendixona. Mówi ono, że dla układów dynamicznych na płaszczyźnie, generowanych przez pola wektorowe klasy C^1, zbiór graniczny $\omega(x)$ jest orbitą okresową, o ile punkt x jest asymptotycznie okresowy.

W ostatnim podrozdziale Rozdziału 3. pan K. Gryszka przypomina wybrane, podstawowe pojęcia z topologii algebraicznej potrzebne do sformułowania i udowodnienia Twierdzenia 3.3.9. Zakładając, że ϕ jest potokiem na X i zbiór ω-graniczny pewnego punktu $x \in X$ jest zwartym ENR-em o mocy większej niż 1 i nietrywialnej charakterystyce Eulera, autor rozprawy dowodzi, że x nie jest punktem asymptotycznie okresowym.

Rozdział 4. rozprawy dotyczy własności równoważnych układów dynamicznych. Na początku rozdziału autor przypomina, co to jest entropia topologiczna $h(\phi)$ potoku ϕ i co to jest tempo wzrostu orbit okresowych $p(\phi)$ dla potoku ϕ.

Punktem wyjścia do napisania tego rozdziału była dla doktoranta publikacja: W. Sun, Ch. Zhang, *Extreme growth rates of periodic orbits in flows*, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 1387–1392. Jej autorzy pokazali, że istnieje taka para równoważnych potoków $\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ i $\psi\colon \mathbb{R} \times Y \to Y$ z punktami stacjonarnymi, określonych na zwartych przestrzeniach metrycznych, że tempo wzrostu orbit okresowych jednego z tych potoków jest ∞, a drugiego 0. Ponadto, udowodnili, że istnieje taki potok ϕ na zwartej przestrzeni metrycznej X, dla którego $h(\phi) = +\infty$ i $p(\phi) = 0$. Wreszcie wykazali, że istnieje taki potok ϕ na zwartej przestrzni metrycznej X, dla którego $h(\phi) = 0$ i $p(\phi) = +\infty$.

Pan K. Gryszka poprzez analogię do tempa wzrostu orbit okresowych dla potoku ϕ wprowadził tempo wzrostu $p_{AP}(\phi)$ orbit asymptotycznie okresowych oraz tempo wzrostu $p_{EAP}(\phi)$ orbit istotnie asymptotycznie okresowych (które są asymptotycznie okresowe, ale nie są okresowe). Następnie uogólnił wynik ze wspomnianej pracy uwzględniając również orbity asymptotycznie okresowe. Pokazał, że dla dowolnych $a, b, c, d \in [0, \infty]$, istnieje zwarta przestrzeń metryczna X oraz para równoważnych potoków $\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ i

$\psi\colon \mathbb{R} \times X \to X$ z punktami stacjonarnymi, dla których $p(\phi) = a$, $p(\psi) = b$, $p_{EAP}(\phi) = c$ i $p_{EAP}(\psi) = d$ (Tw. 4.3.6). Rezultat ten został opublikowany w cytowanym wcześniej artykule doktoranta.

Rozprawa jest poprawnie zredagowana, ale zawiera dużo literówek.

Reasumując. Rozprawa doktorska pana mgra Karola Gryszki poświęcona jest badaniom własności dynamicznych i topologicznych punktów (orbit) asymptotycznie okresowych. W badaniach tych autor rozprawy wykazał się gruntowną wiedzą z teorii ciągłych układów dynamicznych, ale również umiejętnością posługiwania się metodami topologii algebraicznej. Pojęcie asymptotycznego okresu zostało wymyślone przez doktoranta. Ma on już na swoim koncie jedną publikację z tej problematyki, a kolejna (dostępna w formie preprintu) znajduje się w recenzji. Pragnę też zaznaczyć, że na moje zaproszenie, doktorant referował swoje wyniki na Seminarium z Metod Topologicznych i Wariacyjnych w Analizie Nieliniowej na PG w Gdańsku i miał bardzo dobry odczyt.

Wobec powyższego, uważam, że rozprawa doktorska pana mgra Karola Gryszki spełnia wszystkie zwyczajowe i ustawowe (Dz. U. Nr 65, poz. 595, z późn. zm.) wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów w przewodzie doktorskim.

Joanna Janczewska