Prof. dr hab. Paweł Domański
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Adama Mickiewicza
ul. Umultowska 87,
61-614 Poznań

Poznań, 15 grudnia 2014 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgra Sylwestra Zająca pt. "Geometryczna teoria funkcji w wypukłych obszarach tubowych i w dynamice operatorowej"

Recenzowana praca składa się z dwóch odrębnych części. Jedna poświęcona jest geodezyjnym w wypukłych obszarach tubowych a druga opisuje dynamikę operatora kompozycji w przestrzeni funkcji holomorficznych na rozmaitościach Steina. Tym co wiąże obie części jest geometryczna teoria funkcji zespolonych wielu zmiennych. Pierwsza część jednoznacznie przynależy do analizy zespolonej, druga leży na pograniczu analizy funkcjonalnej (stamtąd pochodzi problem) i analizy zespolonej wielu zmiennych (z której brane są narzędzia rozwiązania problemu). Moim zdaniem każda z tych części byłaby dobrą rozprawą doktorską. W obu rozwiązano iteresujący problem z trudnym dowodem i uzyskano wynik nowatorski i użyteczny.

Pierwsza część dotyczy opisu geodezyjnych zespolonych w wypukłych obszarach tubowych. Na mocy twierdzenia Lemperta w obszarach wypukłych wszystkie metryki niezmiennicze są równe (w szczególności, pokrywają się metryki Caratheodory'ego i Kobayashi). W tej sytuacji geodezyjną w obszarze wypukłym $G \subset \mathbb{C}^d$ nazywamy takie odwzorowanie holomorficzne dysku jednostkowego $\mathbb{D}$ w G, które jest izometrią w metryce niezmienniczej (na dysku to odległość Poincaré a w G to np. metryka Kobayashi). W książce Jarnickiego i Pfluga o metrykach niezmienniczych przedstawiony jest lemat opisujący geodezyjne w obszarach wypukłych ograniczonych. Doktorant uogólnia ten wynik na pewne obszary nieograniczone (Tw. 1.1.2): obszary tubowe, które są postaci $D + i\mathbb{R}^d$ dla pewnego wypukłego podzbioru $D \subset \mathbb{R}^d$ zwanego bazą obszaru tubowego. Charakteryzacja jest dość techniczna ale jednak "sprawdzalna". Doktorant idzie jednak dalej i dla pewnych obszarów tubowych (z bazą zawartą w "kwadrancie" $\mathbb{R}^d_-$ przestrzeni $\mathbb{R}^d$ i z każdym punktem zawierającą odpowiedni przesunięty "kwadrant" o wierzchołu w tym punkcie) opis jest bardziej bezpośredni w terminach tzw. miary granicznej (Tw. 1.1.4). To ostatnie twierdzenie daje metodę znajdywania wszystkich geodezyjnych, gdyż jest ono dychotomią: albo geodezyjna jest sprowadzalna do wymiaru o jeden mniejszy albo jest pewnej specjalnej postaci opisanej w twierdzeniu. W wymiarze jeden oczywiście geodezyjne są dobrze znane: są to odwzorowania konforemne dysku na półpłaszczyznę. Doktorant w końcu rozdziału 1.4 analizuje szczegółowiej przypadek dwuwymiarowy.

W Rozdziale 1.5 pokazuje jak uzyskane twierdzenia pozwalają opisać wszystkie geodezyjne dla rozmaitych konkretnych przykładów np. dla obszaru z bazą ograniczoną przez hiperbolę lub przez parabolę. A jak jest dla obszaru z bazą eliptyczną? Ukoronowaniem części pierwszej jest zastosowanie do pełnych, ograniczonych pseudowypukłych obszarów Reinhardta, gdzie autor znajduje opis tzw. ekstremalnych funkcji dla funkcji Lemperta tj. takich funkcji f z dysku w obszar, które dla pewnych dwóch punktów z obszaru dają najmniejszą możliwą odległość Poincaré przeciwobrazów.

Znana metoda dowodu dla obszarów ograniczonych wymaga dość poważnej modyfikacji aby uzyskać wynik dla obszarów tubowych. Doktorant startuje z dość oczywistej redukcji do obszarów tubowych nie zawierających zespolonych prostych. Wtedy każda funkcja holomorficzna z dysku w taki obszar ma miarę graniczną. Dalsza analiza wyniku zawartego w Tw. 1.1.2 dokonana przez doktoranta nie ma już według mojej wiedzy znanego odpowiednika i policzone przykłady pokazują siłę tej analizy. Metoda jest użyteczna i jak pokazuje przykład obszarów z bazą paraboliczną pewnie ma jeszcze potencjał dalszych zastosowań. Znajomość geodezyjnych pokazuje prawdziwą "geometrię w sensie metryki niezmienniczej" obszaru i jak sądzę jest dość fundamentalną informacją. Uważam, że policzenie geodezyjnych dla wielu typowych obszarów pozwoliłoby zebrać informacje o możliwych sytuacjach — rozprawa pana mgra Zająca jest eleganckim krokiem w tym kierunku. Ta część rozprawy to odkrycie nowego twierdzenia, którego postaci nie można było chyba z góry przewidzieć. W sumie już ten rozdział stanowi bardzo dobrą rozprawę doktorską.

Druga część rozprawy dotyczy charakteryzacji tych operatorów kompozycji C_φ, $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ na przestrzeni funkcji holomorficznych $H(\Omega)$ na rozmaitości Steina (obszarze holomorficzności) Ω, które są hipercykliczne tzn. dla pewnego elementu f dziedziny operatora jego orbita $\{C_\varphi^n f : n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsta w $H(\Omega)$. Odwzorowanie φ zwane symbolem operatora jest odwzorowaniem holomorficznym z Ω w Ω. Przestrzeń $H(\Omega)$ jest jak zwykle wyposażona w topologię zwarto-otwartą. Problem ten należy do teorii dynamiki liniowych operatorów. Wbrew powszechnemu mniemaniu, że tylko nieliniowa dynamika jest ciekawa w ostatnich dziesięcioleciach powstała bogata teoria liniowej dynamiki, czyli badania operatorów liniowych na przestrzeniach Banacha, Frécheta lub nawet na przestrzeniach lokalnie wypukłych w terminach ich orbit.

Istotnie dynamika skończenie wymiarowego operatora liniowego nie może być skomplikowana (np. hipercykliczna czy chaotyczna), ale jak wiadomo od lat dwudziestych XX wieku dla operatorów nieskończenie wymiarowych jest inaczej. Chyba pierwszy przykład takiego operatora hipercyklicznego pojawia się w twierdzeniu Birkhoffa: we współczesnej terminologii oznacza ono, że operator przesunięcia (najprostszy operator kompozycji) na przestrzeni funkcji całkowitych jednej zmiennej jest hipercykliczny. To zdumiewający fakt: istnieje funkcja całkowita jednej zmiennej zespolonej, której przesunięcia przybliżają dowolne funkcje całkowite. Badania dynamiki (nieskończenie wymiarowych) operatorów liniowych nabrały tempa w drugiej połowie XX wieku — pięknym podsumowaniem tej bogatej teorii jest książka Grosse-Erdmanna i Perisa "Linear Chaos" wydana kilka lat temu przez Springera (oznaczana niżej [GEP]). Teoria jest nadal żywa i nadal ukazuje się wiele głębokich twierdzeń. Jednym z istotnych elementów tej teorii jest badanie klasycznych operatorów pod kątem ich zachowania dynamicznego (hipercykliczność, chaotyczność, potęgowa ograniczoność, ergodyczność itp.). Uzyskano wiele wyników dla operatorów różniczkowych, wagowych operatorów przesunięcia (*weighted shift operators*) na przestrzeniach ciągowych i dla innych operatorów klasycznych. Z pewnością do takich podstawowych operatorów należy operator kompozycji — por. bogatą literaturę na ten temat, w tym monografię C. Cowena, B. MacCluer czy książkę J. Shapiro.

W tej sytuacji jest zdumiewające, że pełna charakteryzacja w terminach symbolu hipercyklicznych operatorów kompozycji na przestrzeniach fukcji holomorficznych jednej zmiennej została uzyskana dopiero w 2009 roku przez K.-G. Grosse Erdmanna i R. Mortiniego. Wcześniej znane były tylko wyniki częściowe. Dla funkcji wielu zmiennych prawie nic nie było wiadomo: Bernal-Gonzalez opisał je tylko dla symbolu afinicznego w 2005 r. Rozprawa zawiera pełne rozwiązanie tego problemu dla dowolnych rozmaitości Steina Ω i dowolnych operatorów kompozycji na $H(\Omega)$. Sformułowanie wyniku jest podobne jak w przypadku jednej zmiennej, ale jeden z warunków jest mocniejszy. Doktorant udowodnił, że jeśli kule o skończonym promieniu w pseudometryce Caratheodory'ego są relatywnie zwarte (trochę mocniejszy warunek niż zupełność w pseudometryce Caratheodory'ego) to można użyć tego samego warunku co w przypadku jednej zmiennej. Autor przeanalizował, też warunki na to by operator był tzw. dziedzicznie hipercykliczny (w terminologii książki [GEP] jest to tzw. dziedziczna hipercykliczność wzgl. całego ciągu liczb naturalnych) i pokazał, że jeśli rozmaitość ma relatywnie zwarte kule w pseudometryce Caratheodory'ego to hipercykliczność jest równoważna dziedzicznej hipercykliczności (w szczególności implikuje to, że C_φ jest słabo mieszający — por. tw. Bés-Peris [GEP, Th. 3.15]). Rozdział kończy krótkie uzasadnienie dlaczego badanie rozmaitości Steina zawiera w sobie przypadek operatorów kompozycji na $H(\Omega)$ dla *dowolnego* obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}^d$.

Dowody w tej części są eleganckie i bardzo naturalne — mimo jednak tego, że nie są tak technicznie skomplikowane jak dowody w części pierwszej, to wymagały pomysłowości a przynajmniej dobrego wyczucia teorii funkcji analitycznych wielu zmiennych. W tej części postać twierdzenia była do pewnego stopnia oczekiwana (choć rezultat autora zawiera znaczącą modyfikacje tej "oczekiwanej" postaci) ale nikt nie wiedział jak to udowodnić. Podkreślić należy, że ta część rozprawy nie jest bezpośrednio związana z zainteresowaniami promotora. Także ten rozdział oceniam bardzo wysoko.

Prezentacja obu części jest dość jasna i staranna (np. nie nalazłem typowych literówek). Zasadniczo autor wyjaśnia tło swoich wyników i ich miejsce w ogólnej teorii — szczególnie w pierwszej części rozprawy. Zestaw literatury jest bardzo obszerny i dowodzi dobrej znajomości tematu przez doktoranta. Jednak troche zadziwiająca jest nieobecność jakiejś nowoczesnej monografii o dynamice liniowej (albo Grosse-Erdmann–Peris [GEP] albo Bayart–Matheron albo najlepiej obie). Oprócz książki Jarnickiego-Pfluga o metrykach niezmienniczych powinna być też chyba cytowana monografia Kobayashi. Warto by też zebrać obszerniejszą literaturę o geodezyjnych zespolonych. Oczywiście autor mógł przyjąć zasadę minimalistyczną: cytować tylko to co konieczne, ale zwykle od rozprawy doktorskiej oczekuje się aby była do pewnego stopnia "małą monografią" tematu i dlatego obszerniejsza literatura i wyjaśnienia szerszego tła są mile widziane.

Autor powołuje się na pewne fakty zapewne powszechnie znane w grupie zajmującej się tą tematyką, ale recenzent czasami miał trudności w znalezieniu ich uzasadnienia (np. na stronie 10 w ostatnim paragrafie autor pisze, że brak prostych w bazie obszaru tubowego jest równoważny z własnością taut tego obszaru — nie ma żadnego uzasadnienia ani odwołania do książki, podobnie na stronie 44 na samej górze strony podaje bez referencji przykłady obszarów zupełnych w metryce Caratheodory'ego). Jeśli autor odwołuje się do książki liczącej wiele stron (np. na stronie 38 akapit powyżej Prop. 1.6.2), należałoby podać stronę lub numer twierdzenia, do którego chcemy się odwołać .

Autor używa pojęcia "zestawienie miar wektorowych" (np. str. 11 ostatni akapit), ale przecież jest dobrze ustalone pojęcie miary wektorowej i je należałoby używać. Podobnie Tw. 2.2.3 chyba jest w istocie tzw. twierdzeniem Birkhoffa o tranzytywności więc przynajmniej w jakiejś wersji było znane przed pracami, które autor wymienia. Na stronie 31 jest używane oznaczenie "T_c", które jak się wydaje nigdy nie zostało wprowadzone. Pewną konfuzję u recenzenta wywołało też oznaczenie na str. 38 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \cup \{1\}$: co oznacza tu 1? W rozdziale zawierającym przykłady przydałoby się więcej rysunków. Recenzent uważa, że użycie w rozprawie słowa "propozycja" jako nagłówek pewnych twierdzeń czy lematów jest nietrafne: słowo to moim zdaniem jest znaczeniowo związane z czasownikiem "proponować", tymczasem autor twierdzi a nie proponuje, że coś jest (a może nie) prawdziwe. Wyczuwam tu wpływ angielskiego "Proposition", które słownik PWN tłumaczy jako "twierdzenie", "teza", "teoremat", podczas gdy ten sam słownik tłumaczy polskie "propozycja" jako "proposal" lub "offer" co odpowiada mojej intuicji.

Te pare, w gruncie rzeczy drugorzędnych, uwag krytycznych nie zmieniają mojej bardzo dobrej opinii o pracy. To kawał dobrej matematyki i dowód wszechstronnej wiedzy doktoranta.

Podsumowując: Praca zawiera rozwiązanie dwóch trudnych i interesujących dla szerszego grona matematyków problemów matematycznych z dwóch dość odległych obszarów ale czerpiących z podobnego zakresu narzędzi. Prezentacja jest elegancka, dowody porządnie zrobione, jest to więc bardzo dobra rozprawa doktorska (a właściwie dwie rozprawy). Autor dowiódł dużej dojrzałości matematycznej i szerokiej wiedzy a także umiejętności rozwiązywania złożonych problemów matematycznych. Powiem więcej, dzięki dwoistości rozprawy widać, że autor potrafi zarówno odkrywać nowe twierdzenia jak i dowodzić hipotez. Biorąc powyższe pod uwagę sądzę, że rozprawa zasługuje na wyróżnienie, no i oczywiście rekomenduję dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego na jej podstawie.