Streszczenie rozprawy doktorskiej pt.

PROPERTIES OF THE ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND TYPICALLY-REAL FUNCTIONS RELATED TO GENERALIZED KOEBE FUNCTION

(WŁASNOŚCI WIELOMIANÓW ORTOGONALNYCH ORAZ FUNKCJI TYPOWO-RZECZYWISTYCH ZWIĄZANYCH Z UOGÓLNIONĄ FUNKCJĄ KOEBEGO)

ANNA TATARCZAK

Celem naukowym przedstawionej rozprawy jest wyznaczenie powiązań pomiędzy rodzinami funkcji analitycznych oraz rodzinami wielomianów ortogonalnych. Ogniwem łączącym te rodziny oraz odpowiadające im kierunki badań jest uogólniona funkcja Koebego. Klasyczna funkcja Koebego, która jest funkcją ekstremalną dla wielu problemów w klasie funkcji jednolistnych i gwiaździstych, doczekała się w przeciągu ostatnich lat szeregu uogólnień (zob. [3, 5, 8, 11, 12]). W rozprawie definiujemy uogólnioną funkcję Koebego, wychodząc z postaci Gaspera [5].

$$k^q(z) = \frac{z}{(1-z)(1-qz)} \quad (|z| \le 1, q \in [-1,1]), \tag{2}$$

której naturalnym rozszerzeniem jest dwuparametrowa funkcja

$$k^{p,q}(z) = \frac{z}{(1-pz)(1-qz)} \quad (|z| \le 1, p, q \in [-1,1]). \tag{3}$$

Zbadanie podstawowych własności funkcji $k^{p,q}$ jest pierwszym problemem badawczym rozważanym w rozprawie. W Rozdziale 2. rozprawy przedstawiamy geometryczny opis obrazu koła jednostkowego poprzez funkcję $k^{p,q}$; dzięki wprowadzeniu dwóch parametrów otrzymujemy pełną informację na temat zmian obrazu dla pełnego, dopuszczalnego zakresu parametrów. Ponadto rozwiązane są standardowe problemy ekstremalne dla $k^{p,q}$, w tym oszacowania modułu funkcji, współczynników, części rzeczywistej oraz urojonej oraz wyznaczane są promienie gwiaździstości i wypukłości.
Uogólniona funkcja Koebego, jak i odpowiednie klasy funkcji są związane poprzez funkcję jądrową z wielomianami typu Czebyszewa I rodzaju i II rodzaju ($T_n(p,q;e^{i\theta})$ i $U_n(p,q;e^{i\theta})$):

$$\frac{1}{(1-pze^{i\theta})(1-qze^{-i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(p,q;e^{i\theta})z^n \quad (|z|<1),$$

$$\frac{1-(pe^{i\theta}+qe^{-i\theta})z/2}{(1-pze^{i\theta})(1-qze^{-i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(p,q;e^{i\theta})z^n \quad (|z|<1),$$

gdzie $\theta \in [0, 2\pi]$, $-1 \leq p, q \leq 1$. W Rozdziale 3. przedstawiamy szereg podstawowych charakterystyk wielomianów $T_n(p, q; e^{i\theta})$ i $U_n(p, q; e^{i\theta})$ (równanie rekurencyjne, równanie różnicowe, ortogonalność, itp.) oraz równania łączące te dwa rodzaje wielomianów. Wyniki tej części rozprawy można uznać za wprowadzenie do badania własności klasy uogólnionych funkcji typowo-rzeczywistych. Niemniej jednak z perspektywy wielomianów ortogonalnych stanowią one nowy obszar badawczy.

Całkowa reprezentacja Robertsona klasycznych funkcji typowo-rzeczywistych zawiera funkcję jądrową typu Koebego [9]. Przez analogię określamy dwuparametrową rodzinę funkcji typowo-rzeczywistych $\mathcal{T}^{p,q}$ jako rodzinę funkcji analitycznych f, unormowanych warunkiem $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, postaci

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z}{(1 - e^{i\theta}pz)(1 - e^{-i\theta}qz)} d\mu(\theta) \quad (|z| < 1),$$

gdzie $\mu(\theta)$ jest miarą probablistyczną na przedziale $[0, 2\pi]$. Odpowiednio zdefiniowana jest dwuparametrowa rodzina funkcji Caratheodory'ego $\mathcal{P}^{p,q}$. Dowolny rozkład parametrów p, q pozwala na wyznaczenie geometrycznej własności klasy $\mathcal{T}^{p,q}$, która staje się pomostem łączącym funkcje symetryczne względem osi rzeczywistej (klasyczne typowo-rzeczywiste) i symetryczne względem osi urojonej. Oznacza to, że $\mathcal{T}^{p,q}$ jest rodziną funkcji symetrycznych względem dowolnej prostej przechodzącej przez początek układu. W Rozdziale 4. prezentujemy wspomniane wyniki jak również szczegółowe własności tak określonych rodzin funkcji. Jednym z ważniejszych problemów w klasie $\mathcal{T}^{p,q}$ jest wyznaczenie obszaru lokalnej jednolistności oraz promienia jednolistności, gdyż funkcje typowo rzeczywiste w ogólności nie są jednolistne. Problem ten jest rozwiązany przy wykorzystaniu metody punktów ekstremalnych.

Ponadto, w Rozdziale 4. wyznaczone są oszacowania współczynników oraz modułu funkcji $f \in \mathcal{T}^{p,q}$. Z ostatnim problemem wiąże się hipoteza współczynnikowa, postawiona w 1960 roku przez Zalcmana. Hipoteza ta wzbudziała szerokie zainteresowanie gdyż implikuje hipotezę Bieberbacha (wtedy jeszcze nierozwiązaną). Brown and Tsao [2] wykazali prawdziwość hipotezy Zalcmana dla funkcji gwiaździstych i typowo-rzeczywistych. W odpowiedniości do niej Ma [7] sformułował uogólnioną hipotezę Zalcmana i wykazał ją dla funkcji jednolistnych o rzeczywistych współczynnikach. Rozwiązanie tej hipotezy w klasie $\mathcal{T}^{p,q}$ jest przedstawione w Rozdziale 4. W dowodzie wykorzystujemy zależności uzyskane poprzez związki z wielomianami ortogonalnymi $U_n(p, q; e^{i\theta})$, mianowicie dla $f \in \mathcal{T}^{p,q}$, mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{n-1}(p, q; e^{i\theta}) d\theta.$$

Uzyskane wyniki są dokłane, w rozprawie podajemy funkcje, dla których realizowane są równości.

Pewna modyfikacja uogólnionej funkcji Koebego i zadanie jej jako funkcji tworzącej prowadzi do uogólnionych wielomianów Meixnera-Pollaczka, tzw. GMP (Generalized Meixner-Pollaczek) $P_n^\lambda(x;\theta,\psi)$ zmiennej rzeczywistej x $(\lambda > 0,\ \theta \in (0,\pi),\ \psi \in \mathbb{R})$

$$\frac{1}{(1-ze^{i\theta})^{\lambda-ix}(1-ze^{i\psi})^{\lambda+ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^\lambda(x;\theta,\psi)z^n \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Analiza własności wielomianów GMP jest kolejnym zadaniem podjętym w pracy. W Rozdziale 5. przedstawiamy podstawowe charakterystyki GMP, w szczególności równanie rekurencyjne, równanie różnicowe, wzór explicite oraz dowodzimy ortogonalności tych wielomianów. Badane są również szczególne przypadki doboru parametrów, prowadzące m.in. do wielomianów symetrycznych oraz przypadki graniczne.

Literatura

[1] L. Bieberbach , *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, S. - B. Preuss. Akad. Wiss., **138**, (1916), 940 - 955.

[2] J. E. Brown, A. Tsao, *On the Zalcman conjecture for starlike and typically real functions*, Math. Z., **191**(1986), 467 - 474.

[3] D. M. Campbell, J.A.Pfaltzgraff, *Mapping properies of* $\log\ g'(z)$, Colloq. Math. **32**(1974), 267-276.

[4] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[5] G. Gasper, *q-extension of Clausen's formula and of the inequalities used by de Branges in his proof of the Bieberbach, Robertson and Millin conjecture*, J. Math. Anal., **20**(1989), 1019 - 1034.

[6] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys., (1907), 191 - 210.

[7] W. Ma, *Generalized Zalcman conjecture for starlike and typically real functions*, J. Math. Anal. Appl., **234**(1999), 328 - 339.

[8] Ch. Pommerenke, *Linear-invariant Familien analytischer Funktionen*, Mat. Ann. **155**(1964), 108-154.

[9] M. S. Robertson, *On the coefficients of typically real functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **41**(1935), 565 - 572.

[10] W. W. Rogosinski, *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen*, Math. Z., **35**, (1932), 93 - 121.

[11] V. V. Starkov, *The estimates of coefficients in locally-univalent family* U_α', Vestnik Lenin. Gosud. Univ., **13**(1984), 48 - 54.

[12] S. Yamashita, *Nonunivalent generalized Koebe function*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 79 **(1)**, (2003), 9-10.