Prof. dr hab. Ivan Marchenko
Instytut Matematyki
Uniwersytet Szczeciński

Szczecin, 20 października 2014 r.

Recenzja rozprawy doktorskej magister Anny Tatarczak

tytuł pracy: **Properties of orthogonal polynomials and typically real functions related to generalized Köebe function**

promotor: **dr hab. Stanisława Kanas**

Praca doktorska pani magister Anny Tatarczak poświęcona jest geometrycznej teorii funkcji analitycznych. Początek tej teorii dało klasyczne twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu konforemnym. Znaczący wkład w rozwój tematyki wnieśli, między innymi, Ahlfors, Alexander, de Brange, Bieberbach, Köebe, Littlewood, Löwner, Nevanlinna, Study.

Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą funkcji analitycznych w kole $U = \{z : |z| < 1\}$. Każdą funkcję $f \in \mathcal{A}$ można przedstawić w postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in U.$$

Klasę funkcji $f \in \mathcal{A}$ jednolistnych, z klasycznym unormowaniem $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ oznaczamy przez S. Funkcję $f \in \mathcal{A}$ nazywamy wypukłą w U jeżeli $f(U)$ jest zbiorem wypukłym. Mówimy, że zbiór $D \subset \mathbb{C}$ jest gwiaździsty względem punktu $w_0 \in D$ jeżeli wraz z każdym punktem $w \in D$ również odcinek $\overline{w_0 w}$ zawiera się w D. Funkcję $f \in \mathcal{A}$ nazywamy gwiaździstą w U jeżeli $f(U)$ jest zbiorem gwiaździstym względem punktu $w_0 = 0$. W 1913 roku Study podał następujące kryterium wypukłości. *Funkcja $f \in \mathcal{A}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad (z \in U,\ f'(z) \neq 0).$$

Zbiór funkcji wypukłych $f \in S$ oznaczamy przez S^c. W 1921 Nevanlinna otrzymał kryterium gwiaździstości funkcji. *Funkcja $f \in S$ jest gwiaździsta wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (z \in U,\ f(z) \neq 0).$$

Zbiór funkcji gwiaździstych oznaczamy S^*. Dla funkcji wypukłych i jednolistnych znane są następujące oszacowania.

Twierdzenie (Hayman, W.K., *Multivalent functions*, Cambridge Uniwersity Press 1958) *Jeżeli $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest jednolistną funkcją wypukłą, to wówczas dla $|z| = r$, $0 < r < 1$ mamy*

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r},$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2},$$

$$\frac{1}{r(1+r)} \leq \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{r(1-r)}.$$

Wszystkie te nierówności są dokładne, a funkcją ekstremalną jest $f(z) = \frac{z}{1-z}$. Dla funkcji gwiaździstych łatwo uzyskać poniższe oszacowanie współczynników.

Twierdzenie (Hayman,W.K., *Multivalent functions*, Cambridge University Press 1958) *Niech* $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ *będzie jednolistną funkcją gwiaździstą. Wówczas*

$$|a_n| \leq n \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

Oszacowanie to jest dokładne. Funkcją ekstremalną jest tu funkcja Köebego $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. W 1916 roku Bieberbach postawił hipotezę, że powyższe oszacowanie współczynników jest słuszne również w przypadku ogólnym funkcji analitycznych jednolistnych w kole jednostkowym. W przypadkach szczególnych słuszność tej hipotezy była badana przez wielu matematyków: $|a_2| \leq 2$ (Bieberbach, 1916), $|a_3| \leq 3$ (Löwner, 1923), $|a_4| \leq 4$ (Garabedian, Schiffer, 1955), $|a_6| \leq 6$ (Pederson, Ozawa, 1968), $|a_5| \leq 5$ (Pederson. Schiffer, 1972). Wreszcie, w 1984 roku de Brange udowodnił hipotezę Bieberbacha w przypadku ogólnym.

Rozdział pierwszy pracy pani Anny Tatarczak ma charakter wstępny. Przedstawia, między innymi, własności wielomianów ortogonalnych.

W rozdziale drugim badane są własności uogólnionej funkcji Köebego

$$k_{p,q}(z) := \frac{z}{(1-pz)(1-qz)}.$$

W twierdzeniu 2.1 pokazano, ze funkcja $k_{p,q}(z)$ jest α–gwiaździsta w U. Ponadto, w podrozdziale 2.2.2 zbadano obraz koła $U = \{z : |z| < 1\}$ przez odwzorowanie Köebego.

W rozdziale trzecim autorka za pomocą funkcji

$$\frac{1}{(1-pze^{i\theta})(1-qze^{-i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(p, q; e^{i\theta})z^n$$

wprowadza wielomiany $U_n(p, q; e^{i\theta})$ i udowadnia ich ortogonalność.

W rozdziale czwartym autorka wprowadza klasę funkcji $\mathcal{T}^{p,q}$.

Definicja 4.1 *Symbolem* $\mathcal{T}^{p,q}$ *oznaczamy klasę uogólnionych funkcji typowo rzeczywistych, określoną jako klasę funkcji* $f \in \mathcal{A}$ *i posiadających reprezentację całkową*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z}{(1-pze^{i\theta})(1-qze^{-i\theta})}d\mu(\theta) \ \ (z \in U), \tag{1}$$

gdzie $\mu(\theta)$ *oznacza miarę probablistyczną na przedziale* $[0, 2\pi]$. Dla tej klasy autorka otrzymała dokładne oszacowanie współczynników a_n $(f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n)$:

$$|a_n| \leq \begin{cases} \frac{|p|^n-|q|^n}{|p|-|q|} & \text{jeżeli } |p| \neq |q|, \\ n|p|^{n-1} & \text{jeżeli } |p| = |q|. \end{cases}$$

Funkcja ekstremalna w tym przypadku to $f(z) = \frac{z}{(1-pz)(1-qz)}$ dla $pq > 0$ i $f(z) = \frac{z}{(1-ipz)(1+iqz)}$ jesli $pq < 0$. Rezultat ten otrzymano z zastosowaniem wielomianów ortogonalnych $U_n(p, q; e^{i\theta})$. gdyż jeśli $f \in \mathcal{T}^{p,q}$, to

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_{n-1}(p, q; e^{i\theta})d\theta.$$

Udowodniono także następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.5 *Niech* $-1 \leq p, q \leq 1$ *oraz niech* $f \in \mathcal{T}^{p,q}$ *będzie postaci* (1). *Wtedy*

$$|a_{n+2} + pqa_n| \leq \begin{cases} (|p| + |q|)\frac{|p|^{n+1}-|q|^{n+1}}{|p|-|q|} & \text{dla } |p| \neq |q|, \\ 2(n+1)|p|^{n+1} & \text{dla } |p| = |q|. \end{cases}$$

Ponadto,

$$|a_{n+2} - pqa_n| \leq |p|^{n+1} + |q|^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

gdzie przyjmujemy $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. *Oszacowania są dokładne, równości osiągane dla funkcji* $k_{p,q}(z)$.

Rozdział piąty autorka poswięciła uogólnionym wielomianom Meixnera-Pollaczka (GMP) - $P_n^\lambda(x;\theta,\psi)$:

$$\frac{1}{(1-ze^{i\theta})^{\lambda-ix}(1-ze^{i\psi})^{\lambda+ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^\lambda(x;\theta,\psi)z^n \qquad (z \in U),$$

gdzie $x, \psi \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\theta \in (0,\pi)$. Zaprezentowała poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 5.2 *Niech* $P_{-1}^\lambda = 0$. *Wielomiany* $P_n^\lambda = P_n^\lambda(x;\theta,\psi)$ *posiadają następujące własności*

a) P_n^λ *spełniają wzór rekurencyjny*

$$P_0^\lambda = 1, \qquad nP_n^\lambda = [(\lambda-ix)e^{i\theta}+(\lambda+ix)e^{i\psi}+(n-1)(e^{i\theta}+e^{i\psi})]P_{n-1}^\lambda-(2\lambda+n-2)e^{i(\theta+\psi)}P_{n-2}^\lambda \ (n \geq 1);$$

b) P_n^λ *dane są wzorem*

$$P_n^\lambda(x;\theta,\psi) = e^{in\theta}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\lambda+ix)_j(\lambda-ix)_{n-j}}{j!(n-j)!}e^{ij(\psi-\theta)} \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\});$$

c) P_n^λ *mają postać hipergeometryczną*

$$n!P_n^\lambda(x;\theta,\psi) = (2\lambda)_n e^{in\theta}\,{}_2F_1(-n,\lambda+ix,2\lambda;1-e^{i(\psi-\theta)});$$

(d) *funkcja* $y(x) = P_n^\lambda(x;\theta,\psi)$ *spełnia równanie różnicowe*

$$e^{i\theta}(\lambda-ix)y(x+i)+[ix(e^{i\theta}+e^{i\psi})-(n+\lambda)(e^{i\theta}-e^{i\psi})]y(x)-e^{i\psi}(\lambda+ix)y(x-i) = 0.$$

Ponadto, w rozdziale piątym udowodniono ortogonalność wielomianów $P_n^\lambda(x;\theta,\psi)$.

Uwagi:

1. Rozdział 3, strona 45. W Uwadze 3.2 autorka twierdzi, że w przypadku $p = q = 1$ i $\theta \in [0,2\pi]$ wielomiany $T_n(p,q;e^{i\theta})$ sprowadzają się do wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju. W jaki sposób? Wielomian Czebyszewa jest zwykłym wielomianem, zaś $T_n(p,q;e^{i\theta})$ wielomianem trygonometrycznym. Stąd ani wielomiany $T_n(p,q;e^{i\theta})$ ani wielomiany $U_n(p,q;e^{i\theta})$ nie są uogólnieniami wielomianów Czebyszewa pierwszego i drugiego rodzaju.

2. Rozdział 3, strony 50,51,52. Nie rozumiem dlaczego autorka zastosowała tu całkę nieoznaczoną.

Uwagi drobne:

1. Strona 7, linia -5. Zamiast '116 titles' powinno być '161 titles'.

2. Strona 8, linia -3. Zamiast '$\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$' powinno być '$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$'.

3. Strona 9, linia 9. Zamiast '$f^{(n)}(z_0)$' powinno być '$f^{(n)}(0)$'.

4. Strona 22, linia 10. Zamiast 'm and n' powinno być 'n and m'.

5. Strona 25, linia -6. Zamiast 'cos(x)' powinno być '$\cos x$'.

6. Strona 30, linia 8. Zamiast '$(1-\alpha$' powinno byc '$(1-\alpha)$'.

7. Strona 34, linia -9. Symbol '$*$' nie został określony.

8. Strona 44. Nie jest jasne dlaczego autorka stosuje oznaczenie $U_n(p,q;e^{i\theta})$ zamiast $U_n(p,q;\theta)$.

9. Strona 59. We wzorze (4.7) 'a' powinno być zmienione na 'e'.

10. Strona 62, linia -5. Powinno być najpierw '$\leq$', a potem '$=$'.

11. Strona 63, lina 2. Suma '$\sum_{k=1}^{s}\lambda_k|B_k|^2$' nie powinna występować dwukrotnie.

12. Strona 67. W twierdzeniu 4.11 symbol '$\mu(\alpha)$' nie jest okreslony.

13. Strona 68, linia -8. Nie jest jasne jaką rolę w lemacie 4.13 pełni funkcja '$S(z,\cdot)$'.

Podsumowanie

Pani Anna Tatarczak w swojej pracy za pomocą uogólnionej funkcji K$\ddot{o}$ebego wprowadziła kilka układów wielomianów ortogonalnych oraz klas funkcji. Otrzymała dla tych klas szereg dokładnych oszacowań. Są to nowe wyniki. Przedstawione w pracy rezultaty zostały opublikowane w czterech artykułach. Powstały również trzy inne artykuły przedłożone w czasopismach naukowych. Moim zdaniem rozprawa magister Anny Tatarczak spełnia wymogi ustawowe stawiane pracom doktorskim i zasługuje na dopuszczenie do publicznej obrony.