Tomasz Warszawski

Wariacje na temat twierdzenia Lemperta

Streszczenie pracy doktorskiej

Praca dotyczy geometrycznej teorii funkcji i składa się z trzech właściwych rozdziałów wraz z Dodatkiem.

W pierwszym rozdziale, opartym na [KWZ13], badam geometrię obszarów semitubowych — naturalnego uogólnienia obszarów tubowych w $\mathbb{C}^2$. Są to zbiory postaci $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$, gdzie Ω jest obszarem w $\mathbb{R}^3$. Punktem wyjścia jest twierdzenie Bochnera (1938): obszar tubowy jest pseudowypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest wypukły. Dzięki związkom obszarów semitubowych z obszarami Hartogsa-Laurenta uzyskuje się m.in. ogólniejsze wyniki niż w [BD12] oraz upraszcza pewne dowody. Pierwszy rezultat stwierdza, że obszar semitubowy, który jest pseudowypukły przy dowolnym położeniu swej bazy w $\mathbb{R}^3$, musi być wypukły. Następnie pokazuję, jak można wyczerpać dowolny pseudowypukły obszar semitubowy za pomocą $\mathcal{C}^\infty$-gładkich silnie pseudowypukłych obszarów semitubowych. W związku z poprzednim twierdzeniem pojawia się naturalne pytanie, czy można znaleźć w $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, niewypukły obszar pozostający pseudowypukłym względem każdej izometrii rzeczywistej. Przykład taki konstruuje się przy pomocy funkcji multisubharmonicznych.

Drugi rozdział, z rezultatami preprintu [War14], jest poświęcony obiektom niedawno wprowadzonym w [ALY13] i [KZ14]: (słabym) m-ekstremalnym i m-geodezyjnym. Uogólniają one ekstremalne Lemperta i geodezyjne — klasyczne obiekty teorii funkcji holomorficznie kontraktywnych (mają również związek z problemami interpolacyjnymi). Idea m-ekstremalnych liczy jednak niemal 100 lat i pochodzi od G. Picka. Zauważył on, że niestałe iloczyny Blaschkego stopnia co najwyżej $m-1$ mają w kole jednostkowym pewną własność ekstremalną, zwaną dziś m-ekstremalnością. Prezentację wyników zaczynam od ogólnych własności i przypadku płaskiego, następnie badam quasi-zbalansowane obszary pseudowypukłe, elipsoidy zespolone i kulę euklidesową, kończąc na własnościach brzegowych. Kontynuuję w ten sposób badanie (słabych) m-ekstremalnych i m-geodezyjnych z punktu widzenia geometrycznej funkcji, zapoczątkowane w [KZ14]. Następujące pytanie o "słabe" uogólnienie twierdzenia Lemperta dla obszarów wypukłych [Lem81, Lem82] wydaje się być istotne: czy słaba m-ekstremalna, $m \geqslant 3$, obszaru wypukłego musi być m-ekstremalną. Okazuje się, że elipsoidy zespolone dostarczają częściowych rezultatów w tej kwestii, jak również ciekawych kontrprzykładów do pokrewnych problemów. Podaję m.in. przykład 3-ekstremalnej nie będącej 3-geodezyjną w wypukłej elipsoidzie. Przy studiowaniu w elipsoidach (słabych) m-ekstremalnych kluczową rolę gra wynik A. Edigariana [Edi95] o ich koniecznej postaci. Dowodzę np., że w wypukłych elipsoidach o równych wykładnikach słaba

m-ekstremalność implikuje m-ekstremalność (wiadomo było o tym w klasycznych obszarach Cartana, w szczególności w kuli euklidesowej). Metoda dowodu daje z kolei jawną postać wszystkich m-ekstremalnych. W przypadku kuli euklidesowej głównym wynikiem jest twierdzenie o 3-geodezyjności dowolnej 3-ekstremalnej. Jest to ważne z tego powodu, że dla $m \geqslant 4$ znane są kontrprzykłady.

Trzeci rozdział zawiera szczegółowy dowód twierdzenia Lemperta dla obszarów silnie liniowo wypukłych. L. Lempert [Lem84] pokazał, że funkcja Lemperta i pseudoodległość Carathéodory'ego oraz pseudometryki Kobayashiego-Roydena i Carathéodory'ego-Reiffena pokrywają się na niepłaskich ograniczonych obszarach silnie liniowo wypukłych z brzegami $\mathbb{R}$-analitycznymi (jest to bardzo głęboki rezultat). W [KW13] podjęliśmy próbę uzupełnienia szczegółów i przebudowy całego dowodu tak, by otrzymać też rezultaty w klasie $\mathcal{C}^2$. Doprowadziło to do rozwiązania dla tego przypadku. Idea dowodu, całkowicie należąca do L. Lemperta, polega na wprowadzeniu tzw. (słabych) E-odwzorowań, które okazują się być geodezyjnymi i jedynymi ekstremalnymi. Konsekwencją jest równość wszystkich pseudoodległości i pseudometryk holomorficznie kontraktywnych oraz opis odwzorowań ekstremalnych. Głównymi różnicami w stosunku do pracy L. Lemperta są (poza wspomnianym rezultatem dla przypadku $\mathcal{C}^2$) oddzielone pojęcia odwzorowań stacjonarnych i E-odwzorowań, własności lokalizacyjne oraz zastosowanie funkcji Minkowskiego obszarów silnie wypukłych.

Literatura

[ALY13] J. Agler, Z. A. Lykova, N. J. Young, *Extremal holomorphic maps and the symmetrised bidisc*, Proc. Lond. Math. Soc. **106**, no. 4 (2013), 781–818.

[BD12] J. M. Burgués, R. J. Dwilewicz, *Geometry of semi-tube domains in $\mathbb{C}^2$*, Adv. Geom. **12**, no. 4 (2012), 685–702.

[Edi95] A. Edigarian, *On extremal mappings in convex ellipsoids*, Ann. Pol. Math. **62**, no. 1 (1995), 83–86.

[KW13] Ł. Kosiński, T. Warszawski, *Lempert Theorem for strongly linearly convex domains*, Ann. Pol. Math. **107**, no. 2 (2013), 167–216.

[KWZ13] Ł. Kosiński, T. Warszawski, W. Zwonek, *Geometric properties of semitube domains*, przyjęte do druku w Adv. Geom., arXiv:1307.8359.

[KZ14] Ł. Kosiński, W. Zwonek, *Extremal holomorphic maps in special classes of domains*, preprint (2014), arXiv:1401.1657.

[Lem81] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. Fr. **109**, no. 4 (1981), 427–474.

[Lem82] L. Lempert, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*, Anal. Math. **8**, no. 4 (1982), 257–261.

[Lem84] L. Lempert, *Intrinsic distances and holomorphic retracts*, in *Complex analysis and applications '81 (Varna, 1981)*, 341–364, Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1984.

[War14] T. Warszawski, *Some remarks on m-extremals and m-geodesics*, preprint (2014).