Roman Dwilewicz
Missouri University of Science and Technology, USA
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

Dnia 20.02.2015

Recenzja pracy doktorskiej mgra Tomasza Warszawskiego *"Wariacje na temat twierdzenia Lemperta"*

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska została napisana w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, pod kierunkiem Prof. Włodzimierza Zwonka oraz promotora pomocniczego dra Łukasza Kosińskiego. Praca, o długości 110 stron, składa się ze Wstępu, trzech głównych rozdziałów oraz Dodatku. Dołączony jest Spis symboli oraz Bibliografia (71 pozycji).

Z grubsza biorąc, praca dotyczy geometrycznych problemów w Analizie Zespolonej. Główne wyniki pracy zawarte są w trzech rozdziałach:

Rozdzial 1. Obszary semitubowe

Rozdzial 2. (Słabe) m-ekstremalne i m-geodezyjne

Rozdzial 3. Twierdzenie Lemperta

Omówię główne wyniki z każdego z trzech rozdziałów.

Omówienie wyników z Rozdziału 1: *Obszary semitubowe*

Niech $z_1, \ldots, z_n$ będą współrzędnymi w przestrzeni zespolonej $\mathbb{C}^n$, gdzie

$$z_\alpha = \operatorname{Re} z_\alpha + i\operatorname{Im} z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

W przypadku gdy $n = 2$ oraz gdy B jest podzbiorem w $\mathbb{R}^3$, *zbiorem semitubowym* nazywamy

$$S_B := \{z \in \mathbb{C}^2 \, : \, (z_1, \operatorname{Re} z_2) \in B\},$$

co utożsamia się z $B \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$. Zbiór B jest nazywany *bazą* i mówimy, że S_B *jest zbiorem semitubowym nad* B.

W tym rozdziale udowodnione są dwa główne twierdzenia, mianowicie

Twierdzenie 1.1.2. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem takim, że obszar semitubowy $S_{A(\Omega)}$ jest pseudowypukły dla każdej izometrii A przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas Ω jest wypukły.*

oraz

Twierdzenie 1.1.3. *Dowolny pseudowypukły obszar semitubowy można wyczerpać C^∞-gładkimi silnie pseudowypukłymi obszarami semitubowymi.*

Twierdzenie 1.1.2 jest uogólnieniem wcześniej znanego w literaturze twierdzenia, mianowicie opuszczone jest założenie o gładkości (klasy C^2) brzegu obszaru. Dowód tego twierdzenia przedstawiony w rozprawie jest bardzo ciekawy, wykorzystuje odpowiedniość między obszarami semitubowymi i obszarami Hartogsa-Laurenta zadaną przez odwzorowanie

$$\Pi : \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto (z_1, e^{z_2}) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Przypuszczając, że Ω nie jest wypukły, po pewnych geometrycznych rozważaniach doprowadza się do sprzeczności z Kontinuitätssatz.

Dowód Twierdzenia 1.1.3 jest w miarę standardowy, mianowicie jeśli D jest obszarem semitubowym, bierzemy $u := -\log \operatorname{dist}(\cdot, \partial D)$ funkcję plurisubharmoniczną, którą regularyzujemy za pomocą splotu z funkcjami radialnymi. Po pewnych standardowych krokach otrzymujemy wypełnienie obszaru D przez C^∞-gładkie silnie pseudowypukłe obszary semitubowe.

Również w Rozdziale 1 postawione jest pytanie związane z Twierdzeniem 1.1.2, mianowicie,

Jeśli $D \subset \mathbb{C}^n$ jest obszarem spełniającym warunek że dla każdej rzeczywistej izometrii A przestrzeni $\mathbb{C}^n$ obszar $A(D)$ jest pseudowypukły, czy wynika stąd, że D jest wypukły?

Zagadnienie to jest nietrywialne dla $n \geq 2$ i okazuje się, że odpowiedź jest negatywna, pokazana w

Propozycja 1.3.6. *Niech $n \geq 2$. Wówczas istnieje niewypukły obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ taki, że obszar $A(D)$ jest pseudowypukły dla każdej rzeczywistej izometrii A w $\mathbb{C}^n$.*

Dowód tej Propozycji jest krótki ale bardzo ciekawy, definiuje się konkretny wielomian

$$u(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2 - \alpha x_m^2), \qquad (\alpha \in (0,1]),$$

i używając własności multisubharmoniczności (analogon funkcji plurisubharmonicznych w sytuacji rzeczywistej) funkcji u, dla $m = 2n$ otrzymuje się że zbiór

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \ u(z) < 1\}$$

nie jest wypukły.

Omówienie wyników z Rozdziału 2: *(Słabe) m-ekstremalne i m-geodezyjne*

Główne rozważania w tym rozdziale dotyczą tzw. słabych m-ekstremalnych, m-ekstremalnych i m-geodezyjnych. Dwa pierwsze pojęcia zostały wprowadzone ostatnio, w roku 2013, przez J. Agler, Z.A. Lykova i N.J. Young [**ALY13**], jako narzędzie pomocnicze do badania pewnych problemów interpolacyjnych. W rozprawie doktorskiej, pojęcia te zostały użyte w geometrycznej teorii funkcji. Pojęcia te uogólniają definicje wprowadzone przez Lemperta w przypadku $m = 2$.

Podamy definicje (słabej) m-ekstremalnej, m-geodezyjnej, jako że są to główne pojęcia używane w Rozdziale 2.

Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ będą parami różnymi punktami. Odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ nazywamy *słabą m-ekstremalną dla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$* jeśli nie istnieje $h \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ takie, że $h(\lambda_j) = f(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, m$. Jeśli powyższy warunek jest spełniony dla każdego wyboru $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, mówimy, że f jest *m-ekstremalną*. Odwzorowanie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ określamy *m-geodezyjną*, jeżeli istnieje $F \in \mathcal{O}(D, \mathbb{D})$ takie, że $F \circ f$ jest niestałym iloczynem Blaschkego stopnia co najwyżej $m - 1$.

Główne wyniki w tym rozdziale dotyczą własności powyższych pojęć dla różnych typów obszarów:

(i) płaskich, tzn. obszarów w $\mathbb{C}$;

(ii) quasi-zbalansowanych obszarów pseudowypukłych, tzn. zbiorów niezmienniczych względem mnożenia współrzędnych przez potęgi λ, mianowicie $D \subset \mathbb{C}^n$, $z \in D \Rightarrow (\lambda^{k_1} z_1, \ldots, \lambda^{k_n} z_n) \in D$, dla $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$;

(iii) elipsoid zespolonych, $\mathcal{E}(p) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^{2p_1} + \ldots + |z_n|^{2p_n} < 1\}$, gdzie $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$;

(iv) kul euklidesowych $\mathbb{B}_n$.

Przytoczę tu tylko niektóre wyniki. Jednym z głównych problemów jest dla jakich obszarów słaba m-ekstremalna jest albo m-ekstremalną lub m-geodezyjną. Z prac Lemperta [**Lem81**], [**Lem82**] odpowiedź jest pozytywna dla obszarow wypukłych gdy $m = 2$. Co się dzieje gdy $m \geq 3$? Tu odpowiedź jest bardziej skomplikowana. W Propozycji 2.4.3 podany jest konkretny przykład, mianowicie

$$f(\lambda) : (a\lambda^{m-2}, (1-a)\lambda^{m-1}), \quad \lambda \in \mathbb{D}, \quad m \geq 3,\ 0 < a < 1,$$

jest m-ekstremalną, ale nie m-geodezyjną dla elipsoidy $\mathcal{E}(1/2) \subset \mathbb{C}^2$.

Ciekawy jest również wynik o równoważności słabej m-ekstremalności i m-ekstremalności oraz podający konkretną formę odwzorowań dla elipsoid $\mathcal{E}(p_0)$, sformułowany w Propozycji 2.4.13 (dość długie sformułowanie, dlatego tu pominiemy).

Przykładem wypukłym, dla $m \geq 4$, jest jednostkowa kula euklidesowa $\mathbb{B}_n$, $n \geq 2$, udowodnione to zostało w [KZ14]. W rozprawie udowodniony jest brakujący przypadek dla $m = 3$,

Twierdzenie 2.5.8. *Dowolna 3-ekstremalna w $\mathbb{B}_n$ jest 3-geodezyjną.*

Omówienie wyników z Rozdziału 3: *Twierdzenie Lemperta*

Trzeci rozdział, najdłuższy - około 50-ciu stron, zawiera szczegółowy dowód twierdzenia Lemperta dla obszarów silnie liniowo wypuklych. Choć, jak pisze autor (str. 6), "idea dowodu należy całkowicie do L. Lemperta", ale uważam, że mgr Tomasz Warszawski uzyskał dodatkowe ciekawe wyniki, które nie występowały we wcześniejszych pracach, np. dla obszarów klasy C^2.

Ponieważ główne wyniki w tym rozdziale dotyczą obszarów (silnie) liniowo wypukłych, zdefiniujemy to pojęcie.

Definicja 3.1.7. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Określamy D mianem *liniowo wypukłego* (odp. *słabo liniowo wypukłego*), jeśli przez dowolny punkt $a \in \mathbb{C}^n \setminus D$ (odp. $a \in \partial D$) przechodzi $(n-1)$-wymiarowa hiperpłaszczyzna zespolona rozłączna z D.

Obszar D jest *silnie liniowo wypukły*, gdy

(a) D jest klasy C^2,

(b) istnieje funkcja r definiująca D taka, że

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) X_j \overline{X}_k > \left| \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(a) X_j X_k \right|, \quad a \in \partial D, \quad X \in T^{\mathbb{C}} D(a)_*$$

Z grubsza biorąc, dla obszaru zachodzi twierdzenie Lemperta jeśli mamy równość wszystkich pseudoodległości i/lub pseudometryk holomorficznie kontraktywnych. Pierwsze wyniki, oryginalnie pochodzące od L. Lemperta z lat 1981 - 1984, są dla klasy obszarów silnie wypukłych (standardowa geometryczna wypukłość), wypukłych, silnie liniowo wypukłych z brzegami $\mathbb{R}$-analitycznymi. Również są prace dla innych klas obszarów.

Autor rozprawy otrzymał twierdzenie Lemperta dla silnie liniowo wypukłych obszarów ograniczonych z brzegiem klasy C^2, mianowicie

Twierdzenie 3.1.13. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, będzie ograniczonym obszarem silnie liniowo wypukłym. Wówczas*

$$c_D = \ell_D, \qquad \gamma_D = \varkappa_D,$$

gdzie c_D, ℓ_D, γ_D, $\varkappa_D$ są pseudometrykami w obszarze D.

(ℓ_D jest funkcją Lemperta, c_D pseudoodległością Carathéodory'ego, $\varkappa_D$ pseudometryką Kobayashiego-Roydena, γ_D pseudometryką Carathédory'ego-Reiffena.)

Inne ważne twierdzenie (**Twierdzenie 3.1.20**, sformułowanie jest dłuższe i bardziej techniczne) dla obszarów silnie liniowo wypukłych $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, podaje charakteryzacje kiedy odwzorowanie holomorficzne $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ jest odwzorowaniem ekstremalnym.

Podsumowanie

Praca jest zredagowana starannie, we Wstępie przedstawione są główne wyniki, główna część pracy zawarta jest w trzech rozdzialach 1 - 3, a na końcu jest zamieszczony Dodatek, w którym omówione są różne pojęcia używane w pracy. Oprócz głównych wyników w rozprawie udowodnionych jest wiele lematów i propozycji, niektóre bardzo ciekawe, otwierające możliwość dalszych badań (na końcu Rozdziału 2 podana jest lista problemów). Tematyka pracy doktorskiej jest trudna, wymagająca dobrej znajomości zarówno analizy zespolonej jednej jak i wielu zmiennych. Pan mgr Tomasz Warszawski pokazał, że jest bardzo dobrze zaznajomiony z trudnymi pojęciami, znakomicie sobie radzi z dowodami wymagającymi ciekawych pomysłów jak również ma opanowane techniki rachunkowe.

Wymienię główne kryteria i zalecenia wynikające z ustawy o stopniach naukowych:

"Rozprawa doktorska, przygotowywana pod opieką promotora albo pod opieką promotora i promotora pomocniczego, o którym mowa w art. 20 ust. 7, powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub oryginalne dokonanie artystyczne oraz wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej lub artystycznej oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej."

Uważam, że rozprawa doktorska spełnia z nawiązką wszystkie wyżej wymienione kryteria. Tym samym wnoszę o dopuszczenie magistra Tomasza Warszawskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Roman Dwilewicz

Roman Dwilewicz