dr hab. Michał Jasiczak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Poznań, 19.12.2014

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Tomasza Warszawskiego
zatytułowanej
"Wariacje na temat twierdzenia Lemperta".

Pan mgr Tomasz Warszawki przedstawił pracę doktorską zatytułowaną "Wariacje na temat twierdzenia Lemperta". Jest to praca z analizy zespolonej wielu zmiennych, dokładniej z geometrycznej teorii funkcji. Należy podkreślić, że doktorant jest autorem lub współautorem 3 prac naukowych. Pierwsza [3] napisana wraz z dr Ł. Kosinskim, który jest promotorem pomocniczym w tym przewodzie, ukazała się w Ann. Pol. Math, druga [4], wspólna z dr. Kosińskim i prof. dr hab. W. Zwonkiem, promotorem tej rozprawy, została przyjęta do druku w Adv. Geom. Pan mgr Warszawski jest także autorem preprintu, *Some remarks on m-extremals and m-geodesics*, który jak sądzę zostanie także przedstawiony do druku.

Recenzowana praca doktorska związana jest z bardzo ważnym w analizie zespolonej problemem porównania na zadanym obszarze holomorficznie kontraktywnych pseudoodległości i pseudometryk. Słynne twierdzenie Lemperta mówi, że dla pewnych obszarów (silnie wypukłych, wypukłych i (niepłaskich ograniczonych) silnie liniowo wypukłych z brzegami $\mathbb{R}$-analitycznymi) wszystkie holomorficznie kontraktywne pseudoodległości i pseudometryki są równe. Podkreślmy w tym miejscu, że Pan mgr Warszawski w swojej pracy uogólnił ten wynik dla obszarów silnie liniowo wypukłych o brzegu klasy C^2. Jest to niewątpliwie ważny i naturalny wynik. Z jednej strony należało przypuszczać, że, jak często bywa w analizie zespolonej, założenie $\mathbb{R}$-analityczności brzegu można osłabić, z drugiej jednak, co zdecydowanie należy podkreślić, L. Lempert nie udowodnił twierdzenia dla obszarów z brzegiem klasy C^2. Dlatego między innymi oceniam wysoko recenzowaną pracę.

Praca doktorska mgra Tomasza Warszawskiego sprawia naprawdę dobre wrażenie. Jest to w pewnym sensie relacja z pola bitwy. Autor zadaje wiele naturalnych i bardzo aktualnych w świetle badań nad pseudometrykami i pseudoodległościami pytań i konsekwentnie na nie odpowiada. Bardzo pozytywne oceniam też zakres stosowanych metod. W pracy z jednej strony pojawiają się iloczyny Blaschkego, z drugiej przestrzenie Sobolewa. Widać, że Autor jest specjalistą w dziedzinie, którą się zajmuje. Wielokrotnie, celnie powołuje się na wyniki uzyskane przez innych matematyków. Służy mu to jako motywacja do badań lub dostarcza metod dowodzenia twierdzeń. W dalszej części recenzji omówię bardziej szczegółowo wyniki uzyskane przez mgra Warszawskiego.

Recenzowany doktorat składa się z trzech właściwych rozdziałów oraz Dodatku, w którym Autor przypomina ważne z punktu widzenia studiowanych przez siebie problemów wyniki. W rozdziale pierwszym Autor bada obszary semitubowe. Pokazuje, że jeżeli obszar semitubowy $S_{A(\Omega)}$ jest pseudowypukły dla każdej izometrii A przestrzeni $\mathbb{R}^3$, to Ω jest wypukły. Twierdzenie to motywowane jest twierdzeniem Bochnera dla obszarów tubowych. W porównaniu z wynikami uzyskanymi dla obszarów semitubowych przez J. M. Burguésa i R. J. Dwilewicza [1] Autor nie zakłada gładkości obszaru. W rozdziale pierwszym pokazane jest także, że dowolny pseudowypukły obszar semitubowy można wyczerpać C^∞-gładkimi silnie pseudowypukłymi obszarami semitubowymi. Dowód pierwszego faktu opiera się na istnieniu, wtedy, gdy Ω nie jest wypukły pewnego specjalnego wielomianu i sprowadza się do Kontinuitätssatz. W rozdziale tym pokazano także w jaki sposób można uprościć rachunki w charakteryzacji pseudowypukłości obszarów semitubowych nad torusami [1].

W rozdziale drugim badane są pojęcia m-ekstremalnych i m-geodezyjnych. Obiekty te są naturalnymi uogólnieniami pojęcia ekstremalnych i geodezyjnych wprowadzonych przez Lemperta. Pojęcie m-ekstremalnej należy widzieć przez pryzmat klasycznego problemu interpolacyjnego Picka, czy Nevanlinny-Picka [10], [8], [9]. Już sam związek z tym ważnym problemem czyni m-ekstremalne naturalnym i ciekawym obiektem badań. Autor bada to pojęcie w quasi-zbalansowanych obszarach pseudowypukłych oraz, co uważam za szczególnie interesujące w elipsoidach zespolonych. Ta klasa obszarów już nie raz dostarczała ważnych przykładów i intuicji. Pokazane jest, że istnieją m-ekstremalne, $m \geqslant 3$, które nie są m-geodezyjnymi, co jest interesujące w świetle wyników Lemperta. Dalej Autor analizuje relacje słabych wersji tych pojęć z ich silnymi postaciami. Autor między innymi przytacza przykłady kolejnych obszarów wypukłych, w których słaba m-ekstremalność implikuje m-ekstremalność. To jest znowu motywowane wynikami Lemperta, zgodnie z którymi słaba 2-ekstremalna obszaru wypukłego jest 2-geodezyjną. Ciekawy jest wynik i jego dowód mówiący, że dowolna 3-ekstremalna w kuli jest 3-geodezyjna. Rozdział drugi zamyka część poświęcona badaniu własności brzegowych m-ekstremalnych. Autor między innymi uzasadnia, że słaba m-ekstremalna ograniczonego obszaru wypukłego $D \subset \mathbb{C}^n$ jest prawie właściwa. Fakt ten jest konsekwencją twierdzenia opisującego własności brzegowe m-ekstremalnych uzyskanego najpierw w pewnej wersji przez A. Edigariana i P. Kliśa [2].

Cały rozdział drugi wyraźnie pokazuje dużą biegłość mgra Warszawskiego w badanej tematyce. Duże wrażenie robi Jego elokwencja w tym zakresie. Płynnie porusza się między wynikami uzyskanymi przez innych matematyków, dodając swoje interesujące obserwacje.

Trzeci rozdział zawiera szczegółowy i niełatwy dowód twierdzenia Lemperta dla obszarów silnie liniowo wypukłych. Co prawda, jak sam Autor podkreśla idea dowodu pochodzi od Lemperta, wkład mgr Warszawskiego jest istotnie większy niż tylko powtórzenie argumentów Lemperta. Przede wszystkim uzyskał on wynik przy słabym założeniu, że brzeg jest klasy C^2. Już sam ten fakt czyni udowodnione twierdzenie ważnym i ciekawym. Warto podkreślić, że zastosowana metoda polega na badaniu geometrii obszarów w otoczeniu brzegów odwzorowań stacjonarnych. To pozwala na lokalizację wyników, co wydaje się być interesujące samo w sobie. Inny ciekawy aspekt dowodu, na co wskazuje sam Autor, to fakt, że własności brzegowe badanych obszarów wyrażone są w języku funkcjonału Minkowskiego. Rozdział trzeci znowu wskazuje na ważny element charakteru matematycznego mgra Warszawskiego. Dobrze porusza się on wykorzystując metody różnych działów matematyki. Przykładem są już wspomniane przeze mnie przestrzenie Sobolewa.

Warto podkreślić staranność przygotowania rozprawy. Jest ona napisana dobrym matematycznym językiem. Nie znalazłem żadnych usterek. Jedynym mankamentem pracy jest pewna maniera polegająca na uznawaniu pewnych faktów za zbyt proste do uzasadnienia. Moim zdaniem w doktoracie dowodzone powinno być wszystko. Nie zmienia to jednak pozytywnego wrażenia jakie wywiera praca.

Podsumowując, uważam rozprawę przedstawioną przez mgra

Tomasza Warszawskiego za dobrą i ciekawą pracę doktorską. Dowodzi ona dużej dojrzałości matematycznej Autora, sporej elokwencji. Jak już pisałem jest on specjalistą w dziedzienie, którą się zajmuje. Z pewnością spełnia ona wymagania stawiane rozprawie doktorskiej. Z przekonaniem, w związku z tym, wnioskuję o dopuszczenie mgra Tomasza Warszawskiego do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Michał Jasiczak

Literatura

[1] J. M. Burgués, R. J. Dwilewicz, *Geometry of semi-tube domains in* $\mathbb{C}^2$, Adv. Geom. **12**, no. 4 (2012), 685–702.

[2] A. Edigarian, P. Kliś, *Almost properness of extremal mappings,* Bull. Pol. Acad. Sc. Math. **57**, no. 2 (2009), 129–133.

[3] Ł. Kosiński, T. Warszawski, *Lempert Theorem for strongly linearly convex domains,* Ann. Pol. Math. **107**, no. 2, (2013), 167–216.

[4] Ł. Kosiński, T. Warszawski, W. Zwonek, *Geometric properties of semi-tube domains,* praca przyjęta do druku w Adv. Geom.

[5] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domains sur la boule*, Bull. Soc. Math. Fr. **109**, no. 4 (1981), 427–474.

[6] L. Lempert, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains* Anal. Math. **8**, no. 4 (1982), 257–261.

[7] L. Lempert, *Intrinsic distances and holomorphic retracts*, in Complex analysis and applications '81 (Varna, 1981), 341–364, Publ. House Bulgar. Acad. Sci. Sofia, 1984.

[8] R. Nevanlinna, *Über beschränkte Functionen, die in gegeben Punkten vorgeschriebene Werte annehmen,* Ann. Acad. Sci. Fenn. **A 13**, no. 1 (1919), 1–71.

[9] R. Nevanlinna, *Über beschränkte analytische Functionen,* Ann. Acad. Sci. Fenn. **A 32**, no. 7 (1929), 1–75.

[10] G. Pick. *Über die Beschränkungen analytischer Funtionen, welche durch vorgegebene Funktioneswerte bewirkt werden,* Math. Ann. **77**, no. 1, (1916), 7–23.