Prof. dr hab. Marian Nowak
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Filipa Sokołowskiego

Projekcje minimalne i absolutne stałe projekcji

dla

Rady Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Rozprawa doktorska mgra Filipa Sokołowskiego dotyczy problematyki minimalnych projekcji w przestrzeniach unormowanych.

Oznaczmy przez $\mathcal{P}(X, V)$ rodzinę wszystkich projekcji przestrzeni unormowanej X na podprzestrzeń V. Liczbę $\lambda(V, X) := \inf\{\|P\| : P \in \mathcal{P}(X, V)\}$ nazywa się relatywna stałą projekcji P. Projekcję $P_o \in \mathcal{P}(X, V)$ nazywa się minimalną, jeżeli $\|P_o\| = \lambda(V, X)$. Stałą $\lambda(V) := \sup\{\lambda(V, X) : V \text{ jest podprzestrzenią } X\}$ nazywa się absolutną stałą projekcji.

Za początek teorii projekcji minimalnych można uznać twierdzenie Łozinskiego z 1948 roku o minimalności klasycznej projekcji Fouriera z przestrzeni $C(2\pi)$ na podprzestrzeń wielomianów trygonometrycznych stopnia co najwyżej n. W 1981 roku Fischer, Morris i Wulbert wykazali, że projekcja Fouriera jest jedyna. Wiele zastosowań projekcji związanych jest z analizą numeryczną oraz teorią aproksymacji, gdzie $P(x)$ może być rozważane jako aproksymacja x w V, co jest ściśle związane z nierównością Lebesgue'a: $\|x - P(x)\| \leq \|Id - P\| \; dist(x, V)$. Do kręgu zagadnień dotyczących problematyki minimalnych projekcji należą istnienie, jedyność, wzory na projekcje minimalne oraz oszacowanie stałych $\lambda(V, X)$.

Rozprawa doktorska mgr Sokołowskiego mieszcząca się w tym nurcie badań składa się ze Wstępu i pięciu rozdziałów. W przejrzyście napisanym i mocno osadzonym w literaturze Wstępie Autor zamieszcza podstawowe pojęcia i ich własności wykorzystywane w dalszej części rozprawy. Na szczególną uwagę zasługują tutaj Twierdzenie 1.16 dotyczące interesujących własności macierzy symetrycznych i Twierdzenie 1.18 dotyczące projekcji P_W i P_F. Wyniki te są wykorzystywane w Rozdziałach 3 i 4. Ułatwia to bardzo lekturę rozprawy.

Rozdział 2 poświęcony jest badaniu minimalnych projekcji przestrzeni funkcji ciągłych $C(S)$ określonych na wielościanie wypukłym S w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, na podprzestrzeń E funkcji afinicznych. Dla $n = 2$ problem ten był rozważany w 2005 roku przez Shekhtmanna i Skrzypka, gdzie autorzy stosując operatory Chalmersa-Metcalfa podali wzór na minimalną projekcję w zależności od stosunku pól czterech trójkątów wchodzących w skład czworoboku $A_1A_2A_3A_4$ na płaszczyźnie. Wykazano, że norma projekcji minimalnej jest maksymalna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pola tych trójkątów są równe (czyli czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ jest równoległobokiem) oraz obliczono tę normę. Mgr Sokołowski w Twierdzeniu 2.8 uogólnia ten wynik na dowolny wielościan wypukły o $n + 2$ wierzchołkach w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdy n jest parzyste, bez stosowania operatora Chalmersa-Matcalfa. Znacznie trudniejszy przypadek nieparzystego n jest rozważany w Twierdzeniu 2.9, gdzie Autor wyznacza maksymalną normę minimalnej projekcji z $C(S)$ na podprzestrzeń E funkcji afinicznych. Dowód tego twierdzenia wymagał od Autora pomysłowości i pokonania sporych trudności rachunkowych.

Pozostała część rozprawy poświęcona jest konstrukcji n-wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni l_∞^N i l_∞^1 $(n \leq N)$ i wyznaczeniu projekcji minimalnych na te podprzestrzenie oraz oszacowaniu absolutnych stałych projekcji. Należy podkreślić, że wyniki te uzyskane zostały z wykorzystaniem komputera (przy ustalonych $n \leq N$), wykorzystując procedurę zamieszczoną we Wstępie. Tematyka ta jest kontynuacją badań prowadzonych przez Koniga, Tomczak-Jaegarmann, Lewickiego, Skrzypka i Shekhtmana.

W Rozdziale trzecim badane są związki między różnymi stałymi projekcji λ_{N-n}^N i λ_n^N, gdzie $\lambda_n^N := \sup\{\lambda(V) : \dim V = n,\ V \subset l_\infty^N\}$. Na szczególną uwagę zasługują tutaj Twierdzenia 3.3 i 3.4 oraz Wnioski 3.5 i 3.6. Ponadto Twierdzenie 3.12 pokazuje ciekawe zależności pomiędzy dowolnymi stałymi projekcji o tym samym N.

W Rozdziałach czwartym i piątym uzyskano oszacowania od dołu stałych λ_{N-2}^N i λ_{N-3}^N oraz oszacowanie tych stałych dla N dążącego do nieskończoności. W Twierdzeniu 4.7 dla N podzielnego przez 3 oraz $n = N - 2$ uzyskano jawne postacie projekcji minimalnych P_W z przestrzeni l_∞^N na W oraz P_F z przestrzeni l_1^N na W oraz wyznaczono normy tych projekcji : $\|P_W\| = \|P_F\| = 7/3 - 4/N$. Ponadto, w Twierdzeniu 4.11 dla N podzielnego przez 3, $N \geq 6$, $n = N - 2$ wykazano, że projekcje P_W i P_F nie są jedynymi projekcjami minimalnymi. W Twierdzeniu 5.4 dla N podzielnego przez 6 oraz $n = N - 3$ pokazano, że projekcje P_W z l_∞^N na W oraz P_F z l_∞^1 na F są projekcjami minimalnymi oraz $\|P_W\| = \|P_F\| = \frac{\sqrt{5}+3}{2} - 6/N$. W końcu, Twierdzenie 5.8 pokazuje, że P_W i P_F nie są jedynymi projekcjami minimalnymi. Należy podkreślić, że dowody uzyskanych tutaj wyników są trudne technicznie i wymagały od Autora stosowania zaawansowanych technik i głębokich własności teorii macierzy.

Rozdział szóstym poświęcony jest oszacowaniu od dołu stałych λ_n^N i $\widetilde{\lambda}_n^N$ dla pewnych n i N.

Rozprawę kończy spis literatury zawierający 39 pozycji, w tym najnowsze prace i monografie dotyczące problematyki projekcji.

Reasumując uważam, że tematyka ocenianej pracy doktorskiej mieści się w ważnym nurcie teorii operatorów na przestrzeniach unormowanych a otrzymane wyniki nawiązują do najnowszych badań prowadzonych obecnie w tej dziedzinie. Opiniowana rozprawa jest obszernym, interesującym i nietrywialnym wkładem do teorii projekcji minimalnych. Autor dobrze opanował trudne i subtelne techniki dowodowe i wykazał się znajomością skomplikowanych zależności między różnymi własnościami projekcji.

Rozprawa jest bardzo przejrzyście i starannie zredagowana. Autor doskonale poradził sobie z prezentacją dużej liczby pojęć, oznaczeń oraz skomplikowanych rozumowań. Nie zauważyłem istotnych usterek językowych i redakcyjnych.

Uważam, że rozprawa doktorska mgra Filipa Sokołowskiego w pełni odpowiada warunkom określonych w Ustawie z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Wnioskuję o dopuszczenie mgra Filipa Sokołowskiego od dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto, biorąc pod uwagę wymienione wyżej walory rozprawy wnioskuję o jej wyróżnienie.

Zielona Góra, 24.06.2014 r.

Nowak