

## Streszczenie

Czasoprzestrzenie typu anty-de Sittera (AdS) zaczęły odgrywać bardzo ważną rolę w fizyce teoretycznej za sprawą korespondencji AdS/CFT [1] postulującej dualność pomiędzy supergrawitacją w przestrzeni  $\text{AdS} \times M$  ( $M$  - zwarta rozmaitość) a konforemna teorią pola (CFT). Stanem podstawowym w tych teoriach jest przestrzeń AdS, czyli maksymalnie symetryczne rozwiązanie próżniowych równań Einsteina z ujemną stałą kosmologiczną  $\Lambda$ . Problem stabilności przestrzeni AdS pozostaje nierozwiązany i stanowi jeden z ważniejszych otwartych problemów w Ogólnej Teorii Względności. Analogiczny problem dla przestrzeni Minkowskiego (rozwiązanie z  $\Lambda = 0$ ) został rozstrzygnięty przez Christodoulou i Klainermana [2], a dla przestrzeni de Sittera ( $\Lambda > 0$ ) przez Friedricha i Anderssona [3]. Jednak w przypadku przestrzeni AdS mechanizm decydujący o jej (nie)stabilności nie jest dobrze poznany, dlatego szczególnie ważne jest badanie dynamiki asymptotycznych przestrzeni AdS. W takich badaniach pomocne są numeryczne symulacje, które mogą ułatwić poznanie tego mechanizmu i umożliwić postawienie hipotezy.

Praca przedstawia wyniki badań nad skalarnymi zaburzeniami trójwymiarowej czasoprzestrzeni anty-de Sittera. Trzy jest wymiarem krytycznym dla równań Einsteina i teoria grawitacji w tej liczbie wymiarów ma pewne nieoczekiwane własności odróżniające ją od teorii w wyższych wymiarach. Jedną z tych własności jest istnienie skończonego progu energii na powstanie czarnej dziury. W związku z tym możemy podzielić zaburzenia na trzy grupy: zaburzenia powyżej tego progu, które mogą utworzyć czarną dziurę, zaburzenia poniżej, które nie mogą utworzyć czarnej dziury oraz zaburzenia leżące dokładnie na progu.

W Rozdziale 1 pt. „Introduction” krótko omawiam maksymalnie symetryczne próżniowe rozwiązania równań Einsteina. Równania Einsteina stanowią współczesny opis teorii grawitacji. W tej teorii czasoprzestrzeń jest rozmaitością różniczkową z lorentzowską metryką  $g_{ab}$ , która spełnia równania

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab},$$

gdzie  $R_{ab}$  jest tensorem Ricciego,  $R$  skalarem Ricciego,  $\Lambda$  stałą kosmologiczną a  $T_{ab}$  tensorem energii-pędu. Z fizycznego punktu widzenia, najważniejsza jest teoria w czterech wymiarach (trzy wymiary przestrzenne + czas), jednak inne wymiary również odgrywają znaczącą rolę w wielu teoriach fizycznych i ich badanie jest nie mniej ważne.

Naturalnym kontekstem dla dyskusji równań Einsteina jest kontekst nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Dlatego jednym z możliwych sposobów badania rozwiązań jest rozwiązywanie problemu Cauchy’ego. W ogólności, rozwiązania takich równań mogą wybuchnąć w skończonym czasie lub pozostawać regularne. W pierwszym przypadku interesujące

jest jaka jest natura powstałych osobliwości, a w drugim jaka jest asymptotyka rozwiązań przy  $t \rightarrow \infty$ . Ze względu na nieliniowość równań jest to problem bardzo skomplikowany do rozstrzygnięcia w ogólnym przypadku. Niemniej jednak, znanych jest kilka ogólnych wyników opisujących globalną dynamikę rozwiązań równań Einsteina. Należą do nich twierdzenia o osobliwościach i hipoteza cenzury kosmicznej.

Następnie omawiam wyniki uzyskane przez Christodoulou dotyczące dynamiki bezmasowego pola skalarowego w czterowymiarowej asymptotycznie płaskiej czasoprzestrzeni [6]-[12], które pokazują, że małe dane początkowe ulegają dyspersji, a duże prowadzą do powstania nagiej osobliwości. Jednak te rozwiązania okazały się niestabilne, więc nagie osobliwości nie mogą powstawać generycznie w kolapsie grawitacyjnym. Wyniki te stanowią pierwszy dowód hipotezy cenzury kosmicznej, która mówi, że osobliwości zawsze znajdują się wewnątrz czarnej dziury.

W Rozdziale 2 pt. „Spacetimes with a negative cosmological constant” omawiam czasoprzestrzeń z ujemną stałą kosmologiczną. Zaczynam od podstawowych własności  $d + 1$ -wymiarowej czasoprzestrzeni anty-de Sittera. Jej metryka ma postać

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\omega_{S^{d-1}}^2,$$

gdzie  $-\infty < t < \infty$ ,  $0 \leq r < \infty$  a  $d\omega_{S^{d-1}}^2$  jest metryką na  $d - 1$  wymiarowej sferze. Łatwo sprawdzić, że ta metryka rozwiązuje równania Einsteina ze stałą kosmologiczną  $\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2\ell^2}$ , gdzie  $\ell$  jest promieniem AdS. Czasoprzestrzeń AdS nie jest globalnie hiperboliczna i aby określić ewolucję fal rozchodzących się w niej, obok warunków początkowych, należy określić również warunki brzegowe. Główna różnica między przestrzenią AdS a przestrzenią Minkowskiego polega na tym, że mechanizm odpowiedzialny za stabilność tej drugiej, dysypacja energii przez dyspersję, nie jest obecny w AdS i problem jej stabilności wydaje się być bardziej skomplikowany. Następnie omawiam model bezmasowego pola skalarowego, który posłużył do badania dynamiki zaburzeń trójwymiarowej czasoprzestrzeni AdS. Ewolucja bezmasowego pola skalarowego  $\phi$  jest rządzona równaniami

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi GT_{ab}, \quad g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = 0,$$

gdzie  $T_{ab} = \partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}(\partial\phi)^2$  jest tensorem energii-pędu. Wybierając stosowną parametryzację metryki  $g_{ab}$  otrzymujemy układ równań różniczkowych na  $\phi$  oraz funkcje metryczne.

Model bezmasowego pola skalarowego w czterowymiarowej asymptotycznej czasoprzestrzeni AdS był badany w [4]. W dalszej części rozdziału omawiam wyniki tam zaprezentowane, które świadczą o niestabilności rozwiązania AdS<sub>4</sub>. Argumenty tam przedstawione mogą zostać łatwo uogólnione dla wyższej liczby wymiarów [5]. Wyniki symulacji numerycznych przedstawione w [4] sugerują, że dla generycznych danych początkowych stanem końcowym ewolucji jest czarna dziura. Ponadto, symulacje numeryczne zostały poparte heurystyczną analizą opartą o rachunek perturbacyjny, który sugeruje, że mechanizmem odpowiedzialnym

za niestabilność czasoprzestrzeni  $\text{AdS}_4$  jest turbulentny transfer energii z niższych do wyższych częstości. W jego efekcie energia skupia się na coraz mniejszych skalach przestrzennych prowadząc do kolapsu grawitacyjnego i powstania czarnej dziury.

W Rozdziale 3 pt. „Three-dimensional gravity” opisuję podstawowe własności teorii grawitacji w trzech wymiarach. Z punktu widzenia teorii równań różniczkowych jest to wymiar krytyczny dla równań Einsteina. Można to zobaczyć patrząc na wymiar stałej grawitacji:  $[G] = M^{-1}L^{d-2}$ , gdzie  $L$  jest długością a  $M$  masą. Dla  $d = 2$  otrzymujemy  $[G] = M^{-1}$ , co oznacza, że o sile grawitacji decyduje tylko masa, a nie jej koncentracja. Ponadto, tensor Riemanna ma tyle samo niezależnych składowych co tensor Ricciego. Konsekwencją tego faktu jest to, że przestrzeń jest płaska tam gdzie nie ma masy. Dalej, pokazuję konstrukcję metryki w obecności cząstki punktowej zaprezentowaną w pracy [13].

W asymptotycznie płaskiej czasoprzestrzeni nie mogą istnieć czarne dziury. Jednak dodanie ujemnej stałej kosmologicznej pozwala uzyskać rozwiązania opisujące czarne dziury w trójwymiarowej czasoprzestrzeni o asymptocie  $\text{AdS}$ . Zostały one znalezione przez Bañadosa, Teitelboima oraz Zanelliego [14]. Tak jak czarne dziury w wyższych wymiarach, czarne dziury BTZ są charakteryzowane przez masę, moment pędu i ładunek elektryczny. Metryka nierotującej czarnej dziury BTZ ma postać

$$ds^2 = - \left( -M + \frac{r^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \left( -M + \frac{r^2}{\ell^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

gdzie  $M$  jest masą.  $M = -1$  odpowiada trójwymiarowej czasoprzestrzeni  $\text{AdS}$ ,  $M > 0$  odpowiada rozwiązaniom czarnodziurowym a  $-1 < M < 0$  odpowiada rozwiązaniom z osobliwością stożkową. Istnienie przerwy między rozwiązaniem opisującym najlżejszą czarną dziurę z  $M = 0$  a czasoprzestrzenią  $\text{AdS}_3$  jest manifestacją faktu, że trzy jest wymiarem krytycznym dla równań Einsteina.

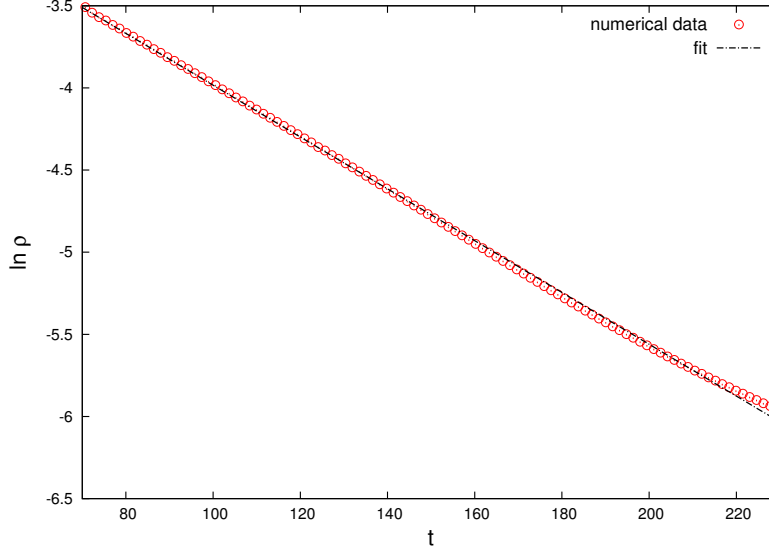
W Rozdziale 4 pt. „Small perturbations of  $\text{AdS}_3$ ” omawiam wyniki moich symulacji numerycznych dla małych zaburzeń  $\text{AdS}_3$  z masą poniżej progu na powstanie czarnej dziury tzn. zaburzeń z masą  $M < 0$ . Rozpatruję dwa typy danych początkowych: zaburzenia zbudowane z pojedynczego modu własnego zlinearyzowanego operatora falowego na  $\text{AdS}_3$  oraz ogólne zaburzenia, dla których wzbudzonych jest dużo modów własnych.

Dla danych początkowych zbudowanych z pojedynczego modu własnego można przeprowadzić rachunek perturbacyjny w amplitudzie początkowego zaburzenia  $\epsilon$ . W trzecim rzędzie rachunku pojawiają się człony rezonansowe, które mogą zostać usunięte metodą modulacji częstości. Okazuje się jednak, że w piątym rzędzie rachunku znowu pojawiają się takie człony, ale tym razem nie mogą zostać usunięte za pomocą wspomnianej metody, co sugeruje włączenie niestabilności po czasie  $\mathcal{O}(\epsilon^{-4})$ . Symulacje numeryczne dla takich danych początkowych bardzo dobrze zgadzają się z wynikami rachunku perturbacyjnego przez długi czas. Zastosowanie metody modulacji częstości znacznie poprawia tę zgodność. Jednak po czasie rzędu  $\epsilon^{-4}$  nie widać numerycznej ewidencji na niestabilność, co sugeruje, że w celu usunięcia członów rezonansowych należy użyć innej, bardziej zaawansowanej metody.

Dla ogólnych małych zaburzeń  $\text{AdS}_3$  od początku wzbudzonych jest dużo modów własnych i rachunek perturbacyjny nie może zostać zastosowany. Ze względu na to, że badane zaburzenia mają masę poniżej progu na powstanie czarnej dziury, mamy dwa możliwe scenariusze: powstawanie osobliwości lub globalna regularność rozwiązań. Ponieważ własności spektralne nie zależą od liczby wymiarów, spodziewamy się turbulentnego transferu energii do wyższych częstości, jak opisano w Rozdziale 2. Symulacje numeryczne tego typu zjawisk są bardzo trudne. Rozwijanie przez rozwiązanie coraz mniejszych skal przestrzennych zawsze musi skutkować utratą rozdzielczości przestrzennej. Mimo to, połączenie symulacji numerycznych ze sprytną metodą bazującą na własnościach spektralnych może pomóc rozstrzygnąć czy osobliwość powstaje w skończonym czasie czy nie. Taką metodą jest metoda pasa analityczności [15]. Jej idea polega na wykorzystaniu zależności pomiędzy własnościami analityczności funkcji a zachowaniem współczynników Fouriera dla dużych liczb falowych  $k$ . Niech funkcja  $u(x, t)$  będzie rozwiązaniem równania różniczkowego, a  $u(z, t)$  jej przedłużeniem na płaszczyznę zespoloną. Jeśli  $z = x + i\rho$  jest położeniem osobliwości funkcji  $u(z, t)$  znajdującej się najbliżej osi rzeczywistej, to  $\rho$  mierzy promień analityczności funkcji  $u$ . Promień analityczności  $\rho(t)$  ewoluuje wraz z rozwiązaniem. Jeśli  $\rho(t)$  zmierza do 0 dla pewnego  $t < T$ , to rozwiązanie staje się osobliwe. Z twierdzenia mamy zależność między współczynnikami Fouriera a  $k$ :

$$u_k \sim |k|^\mu e^{-\rho k} e^{ix_* k} \text{ dla } k \rightarrow +\infty.$$

Dopasowując powyższą zależność do spektrum Fouriera, które zostało znalezione numerycznie otrzymujemy zachowanie  $\rho(t)$ , Rys. 1. Z Rys. 1 widać, że

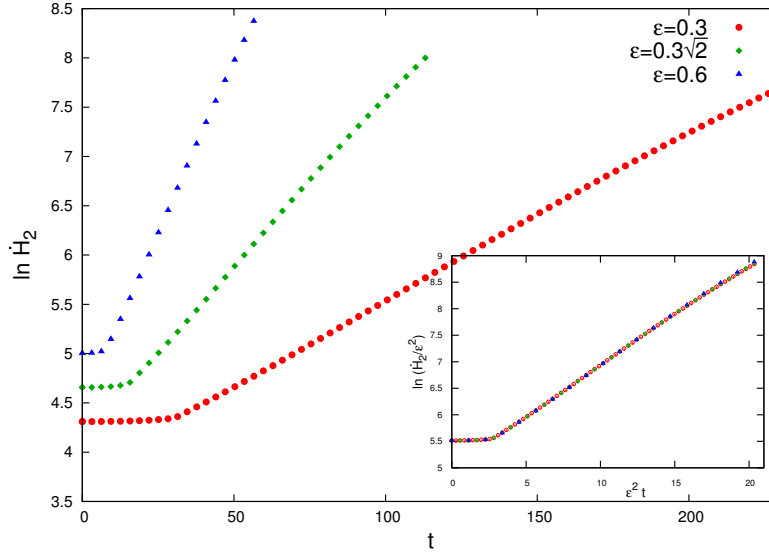


**Rysunek 1:** Zachowanie  $\ln \rho$  w funkcji czasu  $t$  dla ogólnych danych początkowych.

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/T}.$$

Promień analityczności spada eksponencjalnie do 0, ale nigdy go nie osiąga i rozwiązania pozostają globalnie regularne. Ponadto, wyższe normy Soboleva zdefiniowane jako  $\dot{H}_2 =$

$\|\phi''(t, x)\|_2$  po krótkim czasie zaczynają rosnąć eksponencjalnie, a ich wzrost skaluje się jak  $\epsilon^2$ . Zostało to przedstawione na Rys. 2.

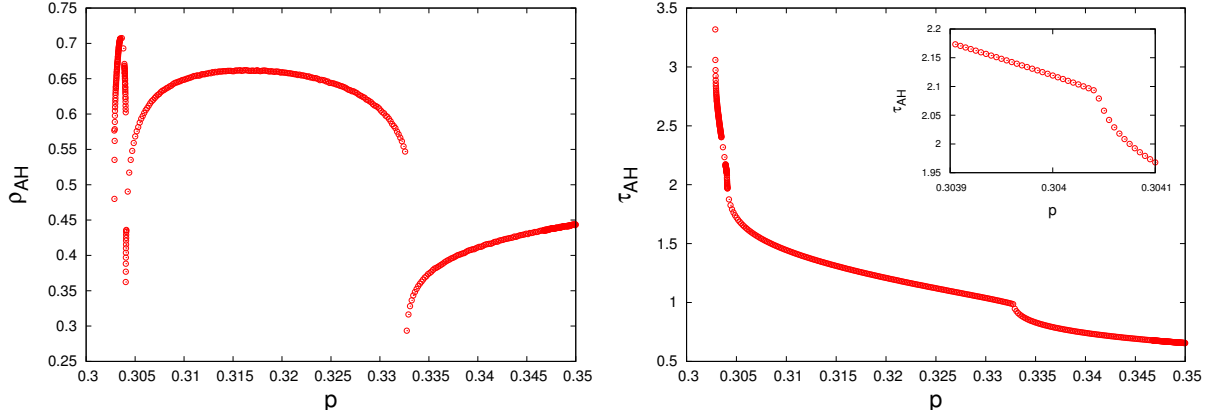


**Rysunek 2:** Wykres przedstawia ewolucję norm  $L^2$  drugiej pochodnej pola skalarnego dla danych z trzema różnymi amplitudami:  $\epsilon = 0.3, 0.3\sqrt{2}, 0.6$  w skali lin-log.  $\dot{H}_2$  oscyluje w czasie dlatego dla przejrzystości prezentacji tylko lokalne maksima zostały zaznaczone. Okno w prawym dolnym rogu prezentuje te same dane po odpowiednim przeskalowaniu.

Podsumowując, dla ogólnych danych początkowych obserwujemy turbulentny transfer energii do wyższych częstotliwości, ale rozwiązania pozostają globalnie regularne, bo ich promień analityczności nigdy nie spada do 0.

W Rozdziale 5 pt. „Large perturbations of  $\text{AdS}_3$ ” prezentuję wyniki moich symulacji numerycznych dla zaburzeń z masą powyżej progu na powstanie czarnej dziury. W tym celu wybrałam jednoparametrową rodzinę danych początkowych, jako wolny parametr wybrałam amplitudę  $p$ . Rys. 3 przedstawia zależność położenia i czas powstania horyzontu pozornego w zależności od amplitudy danych początkowych. Dla wszystkich badanych zaburzeń z masą powyżej progu stwierdzono powstawanie horyzontu i kolaps grawitacyjny. Ponadto, masa powstałej czarnej dziury dąży do masy początkowego zaburzenia. Jest to wynik kauzalnej struktury czasoprzestrzeni  $\text{AdS}$ . Geometria czasoprzestrzeni na zewnątrz czarnej dziury dąży do geometrii BTZ. Dzięki zastosowanemu schematowi numerycznemu i metodzie usuwania osobliwości możliwe jest śledzenie zachowania składowej krzywizny w 0 nawet po powstaniu horyzontu pozornego.

Otrzymane wyniki sugerują, że dynamika zaburzeń z masą powyżej progu na powstanie czarnej dziury jest taka sama jak w wyższych wymiarach. Jednak schemat numeryczny zastosowany w tym przypadku nie pozwala na długoczasową stabilną ewolucję numeryczną. Dla zaburzeń blisko progu  $M = 0$  potrzebne są dokładniejsze symulacje, które pozwolą rozstrzygnąć czy wszystkie takie zaburzenia kolapsują do czarnej dziury.



**Rysunek 3:** Wykres po lewej stronie przedstawia zależność położenia  $\rho_{AH}$  horyzontu od amplitudy  $p$ , a wykres po prawej stronie zależność czasu powstania horyzontu  $\tau_{AH}$  od amplitudy. W zależności  $\tau_{AH}(p)$  nie obserwujemy nieciągłości, tak jakby to miało miejsce w wyższych wymiarach.

W Rozdziale 6 pt. „Critical phenomena in gravitational collapse” omawiam odkrycie zjawisk krytycznych w kolapsie grawitacyjnym przez Choptuika [17]. Choptuik badał jednoparametrową rodzinę, parametryzowaną przez  $p$ , danych początkowych w czterowymiarowej asymptotycznie płaskiej czasoprzestrzeni. Jako model materii wybrał bezmasowe pole skalare. Dla małych wartości parametru obserwował dyspersję a dla dużych kolaps grawitacyjny i powstawanie horyzontu. Pomiedzy tymi dwoma scenariuszami znajduje się rozwiązanie krytyczne  $p^*$  będące na granicy. Dokładna analiza pokazała, że to rozwiązanie ma szereg własności: jest uniwersalne oraz dyskretnie samopodobne. Ponadto, dla wartości parametrów powyżej wartości krytycznej  $p > p^*$  zaobserwował skalowanie masy powstającej czarnej dziury zgodne z prawem potęgowym

$$M_{BH} \sim (p - p^*)^\gamma,$$

gdzie wykładnik  $\gamma$  nie zależy od rodziny danych początkowych. Zjawiska krytyczne w kolapsie grawitacyjnym zostały później odkryte w wielu innych modelach.

W dalszej części rozdziału przedstawiam wyniki badań nad krytycznym kolapsem w trójwymiarowej czasoprzestrzeni anty-de Sittera. Ten problem był badany w pracach [18, 19, 20], jednak, wyniki tam przedstawione nie są rozstrzygające i nie można uznać tego problem za rozwiązany. Wyniki symulacji numerycznych przedstawione w [18] dają mocne podstawy do stwierdzenia, że rozwiązanie krytyczne jest samopodobne. W szczególności autorzy zbadali skalowanie skalarą krzywizny w 0 otrzymując

$$|R| \sim (p - p^*)^{2\gamma}, \quad (1)$$

gdzie  $\gamma = 1.15 - 1.25$  w zależności od rodziny danych początkowych. Stąd, używając argumentów opartych na analizie wymiarowej otrzymali skalowanie masy postaci

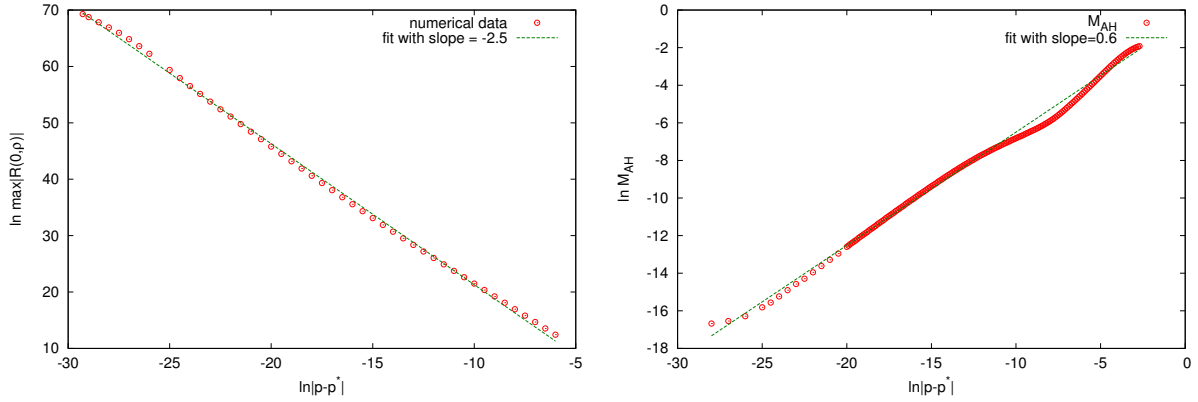
$$M_{BH} \sim (p^* - p)^{-2\gamma} \quad (2)$$

z tą samą wartością  $\gamma$ . Obecność stałej kosmologicznej łamie symetrię skalowania i rozwiązanie krytyczne może być samopodobne tylko w przybliżeniu. Po zaniedbaniu obecności stałej kosmologicznej można znaleźć postać rozwiązania samopodobnego. Zostało to zrobione w [19]. Dokładniej, istnieje rodzina rozwiązań samopodobnych parametryzowana stałą  $c = \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi}(1 - 1/2q)}$ , gdzie  $q$  jest dodatnią liczbą naturalną. Analiza stabilności przeprowadzona w [20] pokazuje, że rozwiązanie samopodobne ma  $q - 1$  modów niestabilnych.

W Rozdziale 7 pt. „Critical data” omawiam wyniki moich symulacji numerycznych zaburzeń znajdujących się na progu na powstanie czarnej dziury. Otrzymane rezultaty potwierdzają te przedstawione w [18] oraz je rozszerzają. Dla jednoparametrowej rodziny danych początkowych parametryzowanej amplitudą  $p$  przeprowadziłam szereg symulacji numerycznych, które pozwoliły na znalezienie amplitudy rozwiązania krytycznego  $p^*$ .

Przeprowadzone testy pokazują, że rozwiązanie znalezione przez Garfinkle’a dla  $q = 4$  dobrze opisuje zachowanie krytyczne blisko 0. Jednak z analizy stabilności wynika, że to rozwiązanie ma 3 mody niestabilne i niemożliwe jest znalezienie takiego rozwiązania wykonując bisekcję tylko w jednym parametrze.

Ponadto, zbadalam skalowanie składowej krzywizny w 0 oraz masy powstającej czarnej dziury. Wyniki są przedstawione na Rys. 4. Obie wielkości zachowują się zgodnie z (1) i (2),



**Rysunek 4:** Wykres po lewej stronie przedstawia skalowanie  $\max|R(0,t)|$  zgodne z (1),  $2\gamma = 2.5$ . Wykres po prawej stronie przedstawia skalowanie masy powstałej czarnej dziury, które jest zgodne z (2), ale wykładnik  $2\gamma = 0.6$ , co jest niezgodne z argumentacją przedstawioną w [18].

ale z innymi wartościami wykładników. Ta niezgodność sugeruje, że rozwiązanie krytyczne blisko 0 jest dobrze opisywane przez rozwiązanie samopodobne znalezione przez Garfinkle’a, ale powstawanie horyzontu pozornego i skalowanie masy jest bardziej skomplikowane.

Rozwiązanie asymptotycznie dążące do rozwiązania Garfinkle’a dla  $\Lambda \rightarrow 0$  może zostać skonstruowane za pomocą szeregu potęgowego. Tam gdzie rozwiązanie Garfinkle’a przestaje opisywać zachowanie krytyczne potrzebny jest inny ansatz. Niestety nie udało się skleić tych dwóch rozwiązań i otrzymać rozwiązania opisującego całe rozwiązanie krytyczne.

W Rozdziale 8 pt. „Conclusions” przedstawiam podsumowanie otrzymanych wyników. Zaburzenia czasoprzestrzeni  $\text{AdS}_3$  z masą poniżej progu na powstanie czarnej dziury pozostają globalnie regularne mimo, że rozwijają coraz mniejsze skale przestrzenne. Zaburzenia z masą powyżej progu kolpsują do czarnej dziury BTZ. Blisko progu  $M = 0$  występują zjawiska krytyczne, a rozwiązanie krytyczne zdaje się być samopodobne i wykazuje skalowanie masy zgodne z prawem potęgowym (2).

W Dodatku A pt. „Numerical methods” omawiam metody numeryczne użyte do przeprowadzenia symulacji numerycznych zaburzeń czasoprzestrzeni  $\text{AdS}_3$ .

# Bibliografia

- [1] J. M. Maldacena, *The Large  $N$  Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv.Theor.Math.Phys. 2, 231 (1998)
- [2] D. Christodoulou, S. Klainerman, *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993
- [3] H. Friedrich, *On the Existence of  $n$ -Geodesically Complete or Future Complete Solutions of Einstein's Field Equations with Smooth Asymptotic Structure*, Commun. Math. Phys. 107, 587 (1986)
- [4] P. Bizoń, A. Rostworowski, *Weakly Turbulent Instability of Anti-de Sitter Spacetime*, Phys. Rev. Lett. 107, 031102 (2011)
- [5] J. Jałmużna, A. Rostworowski, P. Bizoń, *AdS collapse of a scalar field in higher dimensions*, Phys. Rev. D 84, 085021 (2011)
- [6] D. Christodoulou, *The Problem of a Self-Gravitating Scalar Field*, Commun. Math. Phys. 105, 337 (1986)
- [7] D. Christodoulou, *Global Existence of Generalized Solutions of the Spherically Symmetric Einstein-Scalar Equations in the Large*, Commun. Math. Phys. 106, 587 (1986)
- [8] D. Christodoulou, *A Mathematical Theory of Gravitational Collapse*, Commun. Math. Phys. 109, 613 (1987)
- [9] D. Christodoulou, *The Formation of Black Holes and Singularities in Spherically Symmetric Gravitational Collapse*, Commun. Pure & Applied Math. 44, 339 (1991)
- [10] D. Christodoulou, *Bounded Variation Solutions of the Spherically Symmetric Einstein-Scalar Field Equations*, Commun. Pure & Applied Math. 46, 1131 (1993)
- [11] D. Christodoulou, *Examples of Naked Singularity Formation in the Gravitational Collapse of a Scalar Field*, Ann. Math. 140, 607 (1994)
- [12] D. Christodoulou, *The Instability of Naked Singularities in the Gravitational Collapse of a Scalar Field*, Ann. Math. 149, 183 (1999)

- [13] A. Staruszkiewicz, *Gravitation Theory in Three-Dimensional Space*, Acta Phys. Pol. 6, 735 (1963)
- [14] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, *Black hole in three-dimensional spacetime*, Phys. Rev. Lett. 69, 1849 (1992)
- [15] C. Sulem, P.-L. Sulem, H. Frisch, *Tracing Complex Singularities with Spectral Methods*, J. Comput. Phys. 50, 138 (1983)
- [16] P. Bizoń, J. Jałmużna, *Globally Regular Instability of 3-Dimensional Anti-De Sitter Spacetime*, Phys. Rev. Lett. 111, 041102 (2013)
- [17] M. Choptuik, *Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field*, Phys. Rev. Lett. 70, 9 (1993)
- [18] F. Pretorius, M.W. Choptuik, *Gravitational collapse in 2+1 dimensional AdS spacetime*, Phys. Rev. D 62, 124012 (2000)
- [19] D. Garfinkle, *Exact solution for (2+1)-dimensional critical collapse*, Phys. Rev. D 63, 044007 (2001)
- [20] D. Garfinkle and C. Gundlach, *Perturbations of an exact solution for (2+1)-dimensional critical collapse*, Phys. Rev. D 66, 044015 (2002)