Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Joanny Jałmużnej
"Dynamics of perturbations of three-dimensional Anti-de Sitter spacetime"

Praca doktorska pani Joanny Jałmużnej dotyczy problemu stabilności czasoprzestrzeni Anty-de Sittera, czyli maksymalnie symetrycznych rozwiązań próżniowych równań Einsteina z ujemną stałą kosmologiczną. Takie czasoprzestrzenie stały się obiektem zainteresowania wielu fizyków z uwagi na hipotezą o tzw. „korespondencji AdS/CFT". Pomimo tego kwestia ich stabilności nie była rozważana. Przełomem była tu praca [2] Bizonia i Rostworowskiego, którzy stosując symulacje numeryczne oraz nieliniowe rachunki perturbacyjne pokazali, że w czterech wymiarach czasoprzestrzeń AdS jest niestabilna względem powstawania czarnych dziur dla szerokiej klasy dowolnie małych zaburzeń i wskazali na mechanizm tej niestabilności. Niebawem wynik ten – przy udziale pani Jałmużnej – został uogólniony na przypadek wyższych wymiarów [28]. Inaczej wygląda sytuacja w trzech wymiarach. Ten wymiar jest wymiarem krytycznym dla równań Einsteina, co sprawia że ich rozwiązania mają one pewne nieoczekiwane właściwości, inne niż w przypadku czterech bądź większej ilości wymiarów. Głównym celem rozprawy doktorskiej pani Jałmużnej była właśnie analiza dynamiki zaburzeń w czasoprzestrzeni AdS w trzech wymiarach.

Wykonana pod kierunkiem prof. Piotra Bizonia rozprawa doktorska pani Jałmużnej napisana jest w języku angielskim, liczy 97 stron i zawiera wprowadzenie, sześć rozdziałów stanowiących jej zasadniczą treść, podsumowanie, bibliografię oraz dodatek przedstawiający metody numeryczne zastosowane do uzyskania rozwiązań równań Einsteina. Część wyników uzyskanych podczas pracy nad rozprawą było już publikowane w pracach [28] (wspólnie z Andrzejem Rostworowskim oraz Piotrem Bizoniem) oraz [39] (wspólnie z Piotrem Bizoniem).

Rozprawę otwiera wprowadzenie w którym autorka przedstawia problem będący przedmiotem jej zainteresowania, wypisuje podstawowe równania i ich próżniowe, maksymalnie symetryczne rozwiązania. Wskazuje również, że w przeciwieństwie do rozwiązań z zerową i dodatnią stałą kosmologiczną których stabilność względem małych zaburzeń została wykazana [4, 5], problem stabilności rozwiązania z ujemną stałą kosmologiczną (AdS) jest otwarty.

Rozdział drugi zawiera definicję przestrzeni Anti-de Sittera oraz podaje jej główne charakterystyki. Pełna analiza stabilności czasoprzestrzeni AdS (tak analityczna jak i numeryczna) jest w chwili obecnej niemożliwa do wykonania, dlatego też zazwyczaj zakładamy dodatkową symetrię – zwykle symetrię sferyczną. Jednak na mocy twierdzenia Birhoffa sferycznie symetryczne rozwiązania próżniowe nie dopuszczają dynamiki – by uzyskać rozwiązanie dynamiczne musimy dodać dodatkowe pola materii. Wzorem analiz Christodoulou [17–23], Choptuika [3] oraz Bizonia i Rostworowskiego [2] autorka jako to dodatkowe pole umożliwiające dynamikę bierze bezmasowe pole skalarne. Podrozdział 2.2 zawiera komplet równań dla bezmasowego pola skalarnego minimalnie sprzężonego z grawitacją. Pierwszym krokiem w analizie stabilności rozwiązania AdS jest zbadanie liniowej stabilności. Standardowa analiza [26] pokazuje, że w spektrum zlinearyzowanego wokół AdS problemu nie ma modów rosnących czyli rozwiązanie to jest stabilne liniowo. By zbadać kwestię nieliniowej stabilności autorka stosuje metody numeryczne oraz nieliniowy rachunek zaburzeń. Obie te metody wskazują niestabilność rozwiązania AdS względem formowania się czarnych dziur i sugerują mechanizm tej niestabilności jako turbulentny transfer energii z niskich do wysokich częstości. Wyniki umieszczone w rozdziale 2 są uogólnieniem [2] – zostały uzyskane nie tylko w wymiarze 3+1 ale dowolnym wymiarze d+1 , gdzie $d \geq 3$.

Główna cześć rozprawy poświęcona jest analizie stabilności rozwiązania AdS w trzech (2+1) wymiarach. W rozdziale 3 autorka wskazuje na wyjątkowość własności trójwymiarowej grawitacji. Jednym z jej przejawów jest przerwa w spektrum mas między stanem podstawowym AdS_3 (o masie = −1) a najlżejszym rozwiązaniem czarnodziurowym ($M_{BH} > 0$). Tak więc mamy próg na tworzenie czarnych dziur; ewolucja układów z masą mniejszą od progu nie może prowadzić do powstawania czarnych dziur. Oznacza to, że dla małych zaburzeń stanu AdS_3 (takich, dla których energia zaburzonego układu jest mniejsza niż próg) ewolucja będzie dawać globalne w czasie rozwiązanie regularne lub wygeneruje gołą osobliwość w skończonym czasie.

Ustaleniu tego, która z tych możliwości jest realizowana w praktyce poświęcony jest rozdział 4. W tym rozdziale autorka wyprowadza układ równań opisujący model w (2 + 1) oraz implementuje procedurę numerycznego rozwiązania tych równań dla różnych danych początkowych. Tą procedurę numeryczną oraz nieliniowy rachunek zaburzeń stosuje do różnych typów danych początkowych:

- pojedynczy mod – stan własny zlinearyzowanego operatora ewolucji
- generyczne małe zaburzenie AdS3, w którym wzbudzone jest bardzo dużo modów

Dla danych początkowych typu pojedynczy mod zlinearyzowanego operatora ewolucji autorka wykazuje, że dane numeryczne są dobrze opisane przez rozwinięcie perturbacyjne (podobne do tego, które są stosowane w przypadku $d > 3$) z dodatkową modulacją fazy i nie wykazują one żadnej niestabilności. Ponieważ jakościowe cechy widma słabo zależą od wymiaru, możemy oczekiwać, że również w 3 wymiarach mamy rezonansowy transfer energii z niskich do wysokich częstości. Oznacza to, że w trakcie ewolucji rozwiązanie rozwija się na coraz to mniejszych skalach długości, co sprawia, że po pewnym czasie rachunek numeryczny ulega załamaniu z powodu niewystarczającej rozdzielczości przestrzennej. Autorka proponuje dwie modyfikacje pozwalające na kontrolę procesu obliczeniowego i wykorzystanie uzyskanych danych numerycznych do oceny regularności rozwiązania. Pierwsza z nich to wykorzystanie testów zbieżności do ciągłego monitorowania tego, czy aktualnie stosowna rozdzielczość jest wystarczająca. Druga z modyfikacji polega na zastosowaniu metody wyznaczenia pasa analityczności (analyticity strip metod). Zastosowanie tych modyfikacji potwierdza oczekiwania – małe zaburzenia stanu AdS_3 nie prowadzi do powstania gołej osobliwości a raczej do rozwiązania globalnie regularnego. Jednak rozwiązanie to traci stabilność poprzez pojawienie się coraz większej zmienności rozwiązania na coraz mniejszych skalach. Niestabilność ta manifestuje się poprzez eksponencjalny wzrost wyższych norm Sobolewa. Innym sposobem wykazania turbulentnego charakteru ewolucji jest analiza spektrum badanego układu. Rachunki wykonane przez panią Jałmużną pokazują, że w trakcie ewolucji generycznych słabych danych początkowych zostają wzbudzane mody o coraz to wyższych częstotliwościach; o ile dane początkowe wzbudzały około 40 modów o najniższych częstotliwościach, to po czasie 200 praktycznie wszystkie mody (około 1000) brały udział w ewolucji.

Rozdział piąty rozprawy poświęcony jest analizie ewolucji dużych zaburzeń rozwiązania AdS_3 z masą całkowitą większą od zera. Dla takich rozwiązań używany do tej pory w rozprawie układ współrzędnych jest niewygodny ponieważ nie pozwala na penetrację horyzontu pozornego – gdy horyzont zaczyna się formować wymagany przez warunek stabilności krok czasowy maleje do zera i ewolucja numeryczna ulega zamrożeniu. By uniknąć tych problemów autorka wybiera inny układ współrzędnych, stosowany wcześniej przez Choptuika i Pretoriusa [49] i korzysta z wyprowadzonych tam równań, warunków regularności i schematu obliczeń. Wykonane przez nią przy pomocy tej nowej procedury obliczenia sugerują, że wszystkie zaburzenia o masie powyżej progu tworzą powierzchnie złapane czyli kolapsują do czarnej dziury. Ponadto masa powstałej czarnej dziury jest równa wyjściowej masie czasoprzestrzeni.

Ostatnie dwa rozdziały poświęcone są zbadaniu dynamiki w obszarze progu na formowanie się czarnych dziur i zbadaniu ewentualnych efektów krytycznych. W rozdziale szóstym autorka dokonuje podsumowania stanu wiedzy dotyczącego efektów krytycznych w kolapsie grawitacyjnym w 2 + 1 wymiarowym modelu AdS. Omawia oryginalny wynik Choptuika [3] oraz przedstawia własności rozwiązań krytycznych typu II. Następnie przedstawia wyniki numeryczne dotyczące efektów krytycznych w 2 +1 wymiarowym modelu AdS otrzymane przez Choptuika i Pretoriusa [49] Omawia też znalezioną ną przez Garfinkela [50] w modelu z polem skalarnym i zerową stałą kosmologiczną rodzinę ścisłych rozwiązań z ciągłym samopodobieństwem. Garfinkle porównał tak uzyskane rozwiązanie z wynikami numerycznymi [49] i zauważył, że jedno z rozwiązań przez niego uzyskanych nieźle przybliża rozwiązanie krytyczne. Dokładniejsze badania pokazały, że rozwiązanie Garfinkela może być tylko przybliżeniem rozwiązania krytycznego – dodanie niezerowej stałej kosmologicznej wprowadza skalę która nie pozwala na samopodobieństwo pola skalarnego. Ponadto analiza stabilności rozwiązania Garfinkela, pokazuje, że rozwiązanie najbardziej podobne do krytycznego ma 3 mody niestabilne i szansa uzyskania go w procedurze bisekcji jest minimalna.

Rozdział 7 pokazuje oryginalny wkład autorki w zbadanie efektów krytycznych. Są one oparte o wyniki symulacji numerycznych wykonanych przez nią z większą rozdzielczością niż ta, którą stosowali Choptuik i Pretorius [49]. Podobnie jak w [49], kryterium bisekcji było zachowanie się skalara Ricci w centrum.. Dane pani Jałmużnej potwierdzają większość wyników uzyskanych w [49], w szczególności wykładnik potęgowego skalowania skalara Ricci w zerze. Wykonała ona również analizę skalowania masy (która w [59] nie była przeprowadzona) gdzie również uzyskała potęgowe skalowanie, jednak z wykładnikiem różnym od spodziewanego na podstawie wyników skalowania krzywizny. Pokazała też, że zyskane przez nią metodą bisekcji rozwiązanie krytyczne spełnia pewne więzy, których spełnienia spodziewamy się, gdy rozwiązanie krytyczne jest opisane przez rozwiązanie Garfinkela.

Problem stabilności przestrzeni AdS to ważne zagadnienie które, zwłaszcza w ostatnich kilku latach, budzi spore zainteresowanie wśród wielu fizyków. W mojej ocenie badania pani Jałmużnej będące treścią jej rozprawy doktorskiej wpisują się w główny nurt badań nad tym problemem. Jest to jeden z tych problemów, w których podejście numeryczne do analizy rozwiązań pozwala na osiągnięcie zrozumienia natury badanych zjawisk, a na tej bazie ulatwia formułowanie hipotez dotyczących ścisłych rozwiązań i w końcu na udowodnienie tych zainspirowanych przez numerykę hipotez. Pani Jałmużna pokazała, że umie korzystać z narzędzi jakie daje numeryka, potrafi wykonać analizę numeryczną kontrolując w pełni jej przebieg, tak by uzyskać wynik fizyczny nieskażony numerycznymi artefaktami. Przykładem takiego zastosowania narzędzi numerycznych jest analiza dynamiki generycznych małych zaburzeń AdS3 wykorzystująca metodę pasa analityczności i pokazująca ich globalną regularność w czasie.
Rozprawa jest napisana jasno, niezłym językiem, jest starannie zredagowana. Tym niemniej autorka nie wystrzegła się kilku usterek:

- na stronie 61 na początku podrozdziału poświęconego rozwiązaniu krytycznemu czytamy: numeryka sugeruje, że kolaps grawitacyjny jest „typu II", co według autorki oznacza ciągłe rozwiązanie samopodobne. W ogólności „typ II"oznacza rozwiązanie z ciągłym lub dyskretnym samopodobieństwem.
- na 16 stronie – błąd literowy we wzorze (2.9)
- na stronie 16 – błędy w formułach na rozwinięcie funkcji $\varphi(t,x)$ oraz A dla $x = \pi/2$
- na stronie 16 – brak opisu formuły (2.11), a zwłaszcza symbolu $P_k^{(a,b)}$

Konkluzja

Przytoczone wyżej uwagi nie obniżają mojej wysokiej ogólnej oceny omawianej pracy.

Reasumując stwierdzam, że rozprawa doktorska Pani mgr Joanny Jałmużnej spełnia wszystkie ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej autorki do publicznej obrony.

Kraków, 09.10.2014

Tadeusz Chmaj