Prof. dr hab. Paweł Strzelecki
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa, Polska
e-mail: pawelst@mimuw.edu.pl

Warszawa, 26 września 2014

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Pawła Biernata

Rozprawa doktorska *Singularities in heat flow for harmonic maps* Pana Pawła Biernata dotyczy badania osobliwości rozwiązań potoku przekształceń harmonicznych między dwiema rozmaitościami riemannowskimi M, N, tzn. potoku gradientowego dla całki Dirichleta $\mathcal{E}(F) = \int_M |\nabla F|^2 \, d\,\mathrm{vol}$, rozważanej w klasie przekształceń $F\colon M \to N$, mających gradient całkowalny z kwadratem. Więzy, polegające na tym, że wszystkie wartości przekształcenia F należą do rozmaitości N, prowadzą do pojawienia się kwadratowych nieliniowości, zależnych od pierwszych pochodnych rozwiązania: w lokalnych współrzędnych mamy do czynienia z układem równań

$$F_t - \Delta F = A(F, \nabla F), \qquad |A| \lesssim |\nabla F|^2.$$

Podobnego typu osobliwości pojawiają się w wielu innych potokach geometrycznego pochodzenia, np. w potoku Ricciego. To za ich sprawą badanie istnienia, regularności, wybuchów lub asymptotyki rozwiązań takich równań jest rzeczą trudną. W szczególności, od czasu pochodzących sprzed ćwierć wieku prac Struwego i Chena wiadomo, że dla niektórych danych początkowych rozwiązanie 'wybucha' w skończonym czasie, tzn. nie istnieje jako rozwiązanie klasyczne (powiedzmy klasy C^2) dla wszystkich czasów $t > 0$.

Autor zajmuje się przypadkiem, gdy $M = N = \mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ są d-wymiarowymi sferami jednostkowymi. Równanie potoku przekształceń harmonicznych ma wtedy postać

$$F_t - \Delta F = |\nabla F|^2 F.$$

Dodatkowo w całej rozprawie przyjmowane jest założenie – *ansatz* – że mamy do czynienia z rozwiązaniem ekwiwariantnym

$$F(x,t) = \Big(\Omega_k\big(x/r\big)\sin u(r,t), \cos u(r,t)\Big), \qquad r = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gdzie Ω_k jest funkcją własną laplasjanu na sferze. Jak to zwykle w teorii równań cząstkowych bywa, założenie symetrii rozwiązania pozwala nieco uprościć rozważane równania, zmniejszyć liczbę zmiennych etc.

W pierwszej części rozprawy, która stanowiła wspólną publikację z promotorem, prof. Piotrem Bizoniem, przy założeniu $3 \leq d \leq 6$ stosowana jest analiza formalnych rozwinięć asymptotycznych i obliczenia numeryczne do badania tzw. profili wybuchu (tzn., niezbyt precyzyjnie mówiąc, badania asymptotyki) rozwiązań w pobliżu osobliwości. Założywszy, że osobliwość w chwili czasu T jest tzw. *typu I*, tzn. wielkość $\sup(T - t)|\nabla u|^2$ jest skończona, można przeskalować rozwiązanie i otrzymać ciąg, zbieżny do samopodobnego rozwiązania na $\mathbb{R}^d$. Podobnych środków używa się w typowych konstrukcjach, pozwalających przedłużać rozwiązanie poza czas t, w którym pojawia się osobliwość. Dla rozwiązań ekwiwariantnych, równania rozwiązań samopodobnych zmieniają się w równania zwyczajne, które w rozprawie są szczegółowo badane. Wśród kurczących się rozwiązań samopodobnych istnieje dokładnie jedno rozwiązanie stabilne, a wśród rozwiązań rozszerzających się – dokładnie jedno, które ma taki sam profil asymptotyczny. Na podstawie analizy, popartej przekonującymi eksperymentami numerycznymi, wysunięta jest hipoteza, że typowe ekwiwariantne rozwiązanie potoku przekształceń harmonicznych doznaje szeregu wybuchów i przy każdym z nich, zarówno przed pojawieniem się osobliwości jak i po przejściu przez nią, zachowuje się w konkretny, dość precyzyjnie opisany sposób; co więcej, każde pojawienie się osobliwości skutkuje zmianą stopnia przekształcenia o 1.

W drugiej części, dla wymiarów $d \geq 7$, badane są osobliwości typu II, tzn. takie, które nie są typu I. Są one trudniejsze w opisie, z uwagi na szybsze tempo wybuchu i niemożność prostego wykorzystania symetrii równania. Autor konstruuje konkretną rodzinę rozwiązań z takimi osobliwościami. Jest to istotnie nowy wynik; już on sam mógłby być podstawą akceptowalnej rozprawy doktorskiej. Wreszcie, dodatek do rozprawy zawiera dowód pomocniczego twierdzenia o istnieniu i asymptotyce dla $x \to \infty$ rozwiązań nieliniowego równania zwyczajnego, które – po sprytnych zamianach zmiennych i przejściach asymptotycznych – pojawia się podczas konstrukcji rozwiązań osobliwych.

Za najważniejsze zalety rozprawy Pawła Biernata uważam

- wykazaną daleko posuniętą biegłość techniczną i zdecydowanie ponadprzeciętną biegłość rachunkową autora; obie oceniam wysoko, gdyż moim zdaniem znamionują upór, talent i umiejętność przewidywania wyników obliczeń, co w równaniach cząstkowych bywa bardzo ważne;

- umiejętne posługiwanie się metodami analizy do badania konkretnych rozwiązań nieliniowych równań cząstkowych i zwyczajnych,

- wykazaną dobrą znajomość współczesnej literatury w tej tematyce.

Po lekturze rozprawy jestem przekonany, że mgr Paweł Biernat mógłby z powodzeniem zajmować się konstrukcją i analizą przykładów osobliwości konkretnych rozwiązań dla wielu innych równań. W tym sensie rozprawa dowodzi jego prawdziwej matematycznej dorosłości (choć, z mego subiektywnego punktu widzenia, może niekoniecznie pełnej matematycznej dojrzałości, o czym piszę niżej).

Za najważniejszą, kluczową z punktu widzenia matematyka wadę rozprawy uważam jej styl, typowy dla wielu prac w fizyce teoretycznej. Jak każdy czytelnik Biernata łatwo sprawdzi, zasadnicza część rozprawy – jej *analityczne mięso*, najciekawsze wszak dla kogoś, kto zajmuje się równaniami cząstkowymi – to wartki strumień rachunków, w których stopniowo przyjmowane są kolejne założenia, uproszczenia etc. Z punktu widzenia matematyka, w takim tekście niebezpiecznie cienka granica dzieli spekulacje, przybliżenia, *ansatze*, uproszczenia modelu dla wygody rachunków, nieuzasadnione do końca przejścia graniczne itp. od naprawdę precyzyjnie udowodnionych twierdzeń. Precyzyjne wydzielenie z tego strumienia napisów i komentarzy jasnych zestawów założeń i odrębnych, wywiedzionych dowiedzione tez nie jest niestety rzeczą łatwą, a przynajmniej nie było rzeczą łatwą dla niżej podpisanego. Wyrwane z tekstu (pierwsza część, podrozdział 5) zdanie *'As this is our main result, let us phrase it in the form of a conjecture'* dobrze ilustruje to, co chcę powiedzieć; taka fraza matematyka natychmiast prowokuje do komentarza 'to wynik, czy hipoteza?', choć oczywiście w tym akurat przypadku jest jasne, że chodzi o to, iż dotychczasowe rozważania pozwalają autorowi sformułować ciekawą, nieoczywistą hipotezę, precyzyjnie opisującą osobliwości typu I rozwiązań ekwiwariantnych. Skądinąd, postęp w matematyce wymaga czasem także i takiej – przemyślanej wszak i głęboko twórczej! – spekulatywności. Niemniej, jako czytelnik (który w miarę upływu czasu myśli coraz wolniej) wolałbym znacznie wyraźniejsze oddzielenie spekulatywności od tego, co w tekście precyzyjnie udowodnione. Myślę, że rozprawa Pawła Biernata bardzo by na tym zyskała.

Są też w tekście liczne miejsca–lapsusy, takie jak np. napisane chyba po prostu bez zbytniego namysłu wzory (21) czy (25) we wprowadzeniu do rozprawy, które purysta uznałby za formalnie bezsensowne. Wreszcie, są w rozprawie zwykłe dla Polaka drobne usterki angielszczyzny i literówki. Wyliczanie wszystkich miejsc, gdzie coś mi się w tekście nie podobało, uważam jednak w tym przypadku za głęboko bezsensowne: gdybym pisał podobny artykuł sam, to po prostu od początku, z uwagi na własne doświadczenia i tradycję pisania prac, w której wyrosłem, starałbym się zredagować tekst zupełnie inaczej.

Mimo powyższych zastrzeżeń i uwag krytycznych, nie mam wątpliwości, że przedstawiona rozprawa dowodzi zaawansowanych kwalifikacji matematycznych autora i spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie Pana Pawła Biernata do dalszych etapów przewodu doktorskiego.