Streszczenie rozprawy doktorskiej o tytule: „Spectral Action – Beyond the Almost Commutative Geometry”

Michał Eckstein

Zasada działania spektralnego została sformułowana przez A. Chamseddine'a i A. Connesa w 1997 roku [1]. Bazuje ona na koncepcji trójek spektralnych [3] oferując nowy paradygmat dla teorii fizycznych, który zakłada, iż fizyczne działanie zależy tylko of spektrum odpowiedniego operatora Diraca. Od pionierskiej pracy ww. autorów rozpoczęło się intensywne badanie konsekwencji tej propozycji zarówno z punktu widzenia problemów matematycznych jak i potencjalnych zastosowań fizycznych. Głównym kierunkiem rozwoju badań nad działaniem spektralnym jest tzw. „prawie-przemienna geometria”, która ma bezpośrednie zastosowanie w fizyce oddziaływań fundamentalnych [2]. Działanie spektralne zostało również policzone dla kilku przykładów niekomutatywnych przestrzeni w postaci rozwinięcia asymptotycznego dla dużych skali energii. To sformułowanie opiera się jednak na nietrywialnych założeniach matematycznych dotyczących istnienia asymptotycznego rozwinięcia śladu operatora ciepła.

Podstawowym celem rozprawy doktorskiej było uogólnienie metod rozwinięcia asymptotycznego działania spektralnego dla dużych skali energii tak, aby było ono stosowalne dla szerszej klasy trójek spektralnych.

Pierwszy rozdział rozprawy stanowi wprowadzenie do zagadnienia działania spektralnego. Zawiera on podstawowe definicje oraz znane twierdzenia konieczne do sformułowania wyników badań przedstawionych w dalszej części.

Rozdział drugi rozpoczyna właściwą część rozprawy. Traktuje on o rozwinięciu asymptotycznym śladu operatora ciepła w kontekście nieograniczonych operatorów dodatnich o zwartej rezolwencie działających na ośrodkowej przestrzeni Hilberta. Głównym wynikiem w tej części rozprawy jest Twierdzenie 2.2.5, w którym są sformułowane warunki wystarczające dotyczące operatora P gwarantujące istnienie rozwinięcia asymptotycznego dla małych t funkcji $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \operatorname{Tr} e^{-tP} \in \mathbb{R}^+$. Warunki te są wyrażone przy pomocy przedłużenia meromorficznego spektralnej funkcji zeta ζ_P:

$$\mathbb{C} \supset \operatorname{Dom} \zeta_P \ni s \mapsto \operatorname{Tr} P^{-s} \in \mathbb{C}.$$

Dowód opiera się na zastosowaniu transformacie Mellina oraz teorii ogólnych szeregów Dirichleta [6]. Drugim istotnym elementem tego rozdziału dysertacji jest sformułowanie warunków wystarczających (Wniosek 2.2.6), aby rozwinięcie asymptotyczne śladu operatora ciepła było zbieżne dla pewnych wartości $t > 0$. Ogólne twierdzenia zostały zilustrowane licznymi przykładami operatorów z geometrii klasycznej oraz nieprzemiennej.

Wyniki przedstawione w rozdziale drugim są oparte na badaniach prowadzonych przez autora we współpracy z Arturem Zającem [5].

Trzeci rozdział zawiera główny wynik całej rozprawy – twierdzenie o istnieniu asymptotycznego rozwinięcia działania spektralnego dla ogólnych trójek spektralnych (Twierdzenie 3.2.1). Oprócz samego faktu istnienia, precyzuje ono dokładną postać owego rozwinięcia dla ustalonej klasy funkcji obcięcia. Elementem nowym w stosunku do znanych wyników jest pojawienie się członów logarytmicznych oraz oscylujących ze skalą energii. Rozdział ten zawiera również wyniki dotyczące zbieżności asymptotycznego rozwinięcia działania spektralnego (Propozycja 3.2.2), a także wpływu fluktuacji operatora Diraca (Twierdzenie 3.3.1).

W rozdziale czwartym została zdefiniowana nowa klasa trójek spektralnych nazwanych kwazi-regularnymi. Pokazano ich podstawowe własności, w szczególności dotyczące rachunku operatorów psedeudoróżniczkowych. Przykład kwazi-regularnej trójki spektralnej skonstruowanej na kwantowej sferze Podlesia został szczegółowo przedyskutowany w rozdziale 5.

Wyniki przedstawione w rozdziałach 3 i 4 stanowią w pełni samodzielną pracę autora i nie zostały dotychczas opublikowane.

Ostatni (piąty) rozdział rozprawy traktuje o kwantowej sferze Podlesia. Zostało w nim policzone spektrum wymiarów, ślad operatora ciepła, a także działanie spektralne dla tej przestrzeni nieprzemiennej.

Wyniki zawarte w rozdziale 5 zostały opublikowane w artykule [4] będącym owocem współpracy autora z Bruno Iochumem oraz Andrzejem Sitarzem. W rozprawie doktorskiej są one przedstawione w szerszym kontekście opisanym w poprzednich rozdziałach.

Literatura

[1] Ali H Chamseddine and Alain Connes. The spectral action principle. *Communications in Mathematical Physics*, 186(3):731–750, 1997.

[2] Ali H Chamseddine, Alain Connes and Matilde Marcolli. Gravity and the standard model with neutrino mixing. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 11(6):991–1089, 2007.

[3] Alain Connes. *Noncommutative geometry*. Academic press, 1995.

[4] Michał Eckstein, Bruno Iochum and Andrzej Sitarz. Heat Trace and Spectral Action on the Standard Podleś Sphere. *Communications in Mathematical Physics*, pages 1–42, 2014.

[5] Michał Eckstein and Artur Zając. Asymptotic and exact expansion of heat traces. *in preparation*, 2014.

[6] Godfrey H Hardy and Marcel Riesz. *The general theory of Dirichlet's series*. Courier Dover Publications, 2013.