Recenzja pracy doktorskiej Michała Ecksteina

„Spectral action – beyond the almost commutative geometry"

Recenzowana rozprawa doktorska, napisana pod kierunkiem dr hab. Andrzeja Sitarza, ma 150 stron. Oprócz streszczenia w języku polskim, składa się ona ze wstępu, pięciu rozdziałów, podsumowania i bibliografii po angielsku. Jej tematyka wchodzi w zakres geometrii nieprzemiennej, która jest stosunkowo młodą i dynamicznie rozwijającą się dziedziną matematyki, interesującą rownież z perspektywy fizyki matematycznej.

Na poziomie topologicznym za początki geometrii nieprzemiennej uważa się zwykle twierdzenie Gelfanda-Naimarka z lat 40 ubiegłego wieku, które opisuje równoważność kategorii przestrzeni lokalnie zwartych i kategorii przemiennych C^*-algebr (z odwróconymi morfizmami). Od kilkudziesięciu lat, dzięki pracom Alaina Connesa i wielu innych, trwa prężny rozwój geometrii nieprzemiennej. Bada ona nie (koniecznie) przemienne algebry, wyposażone w dodatkowe struktury odpowiadajace np. rachunkowi różniczkowemu, wiązkom wektorowym, i inne. Kluczowym obiektem opisującaym gladką metryczną i spinorową geometrię jest *trójka spektralna* (A, H, D). Oprócz algebry A, reprezentowanej na przestrzeni Hilberta H, w jej skład wchodzi rownież operator typu Diraca D, spełniający pewne warunki. Kilkanaście lat temu sfrormułowana została *zasada działania spektralnego* (spectral action principle), dająca możliwość istotnego rozróżniania i "wartościowania" takich geometrii. Działanie spektralne stało się ważnym i aktywnym tematem badawczym, któremu powśw➀ięcono już kilkaset publikacji.

Recenzowana praca zajmuje się właśnie tym zagadnieniem. Stawia sobie ona za cel uogólnienie dotychczas otrzymanych resultatów na przypadek trójek spektralnych, które nie muszą być gładkie, których spektrum wymiarów nie musi być proste, lub może zawierać liczby z niezerową częścią urojoną. Takie trójki spektralne wprowadzone zostały na przestrzeniach jednorodnych grup kwantowych, a w szczególności na standardowej sferze Podlesia, która jest przestrzenią jednorodną $SU_q(2)$. Przykład ten badany jest w ostatnim (piątym) rozdziale pracy. Należy podkreślić, że interesujące przykłady są bardzo cenne, poniaważ różnorodność możliwych kierunków nieprzemiennych uogólnień jest wieloraka. Grupy kwantowe i ich przestrzenie jednorodne są tutaj szczególnie wdzięcznymi obiektami, ze względu na związane z nimi uogólnione symetrie, które pozwalają uprościć wyjątkowo skomplikowane obliczenia.

Dla otrzymania postawionego sobie celu, autor skrupulatnie przedstawia i rozwija w rozdzialach 1-4 niezbędne pojęcia i wyniki. W szczególności rozdział pierwszy zawiera wyczerpujący, ale tylko niezbędny i dobrze dobrany, znany materiał o trójkach spektralnych, operatorach pseudoróżniczkowych, spektrum wymiarów i nieprzemiennej całce.

Rodział drugi poświęcony jest zagadnieniu śladu operatora ciepła dla operatora D, ktorego rozwinięcie asymptotyczne dla $t \downarrow 0$ jest główną metodą badania działania spektralnego. Takie rozwinięcie - dobrze znane w przypadku operatorów różniczkowych na rozmaitościach Riemannowskich - jak dotąd otrzymano jedynie w kilku przypadkach nieprzemiennych, a zwykle jest ono po prostu postulowane. W oparciu o wyniki uzyskane wspólnie z A. Zającem w [53] w podrozdziale 2.2 otrzymane zostały warunki wystarczające dla istnienia takiego rozwinięcia, stosując odwrotną transformatę Mellina do jawnego przedłużenia meromorficznego funkcji zeta operatora D. Przy nieco silniejszych założenich rozważony został rowniez problem zbieżności otrzymanych szeregów asymptotycznych.

Wyniki rozdziału trzeciego, jedynie poza Def 3.1 i podrozdziałem 3.1.2 (opartym jednakże na współpracy autora w [52]), zostały otrzymane samodzielnie. Przedstawiony jest tam główny wynik rozprawy: wzór na rozwinięcie asymptotyczne działania spektralnego dla dużych energii (Twierdzenie 3.2.1). Ponadto wyprowadzone zostały dokładne (nie asymptotyczne) wzory dla jawnie określonej klasy funkcji obcięcia.

Rozdział czwarty jest w całości nowy i samodzielny. Autor zajmuje się w nim trójkami spektralnymi nie spełniającymi warunku regularności i w tym kontekście wprowadza rachunek operatorów pseudoróżniczkowych.

W rozdziale piątym metody systematycznie opracowane w poprzednich rozdziałach zastosowano do zbadania $U_q(su(2))$-ekwiwariantnej trójki spektralnej dla standardowej sfery Podlesia, który to przyklad odnotowuję ze szczególną satysfakcją. Otrzymane tam wyniki oparte są na współpracy w [52], lecz Prop 5.2.6 i Cor 5.2.7 są zupelnie nowe i samodzielne.

Rozprawa dokumentuje świetne obeznanie autora z dostępną literaturą na badany temat, wliczając w to najnowsze rezultaty. Zawiera ona wiele oryginalnych i ważnych wynikow, których część oparta jest na współpracy w ref. [52] i [53] (w przygotowaniu). Wykazują one sprawność autora w używaniu zaawansowanych i subtelnych metod rozwinięć asymptotycznych. Wyliczenia, które udało mi się sprawdzić, są prawidłowe. Godny podkreślenia jest w szególności trudny technicznie dowód Prop. 5.3.2.

Kilka drobnych uwag natury matematycznej i merytorycznych:
- założenie łączności w Def. 1.1.4. lepiej jest wstawić już w Def. 1.1.1;
- na str. 9 zamiast (1.8) powinno być (1.9);
- odnośnie "disjoint domains ... nowhere defined" i "may be even empty" na str 10: wektor zerowy jest zawsze w dziedzinie każdego operatora liniowego;
- ciekawe (chociaż dla reszty pracy) jest czy różne normy Soboleva na str. 24 są równoważne?;

- odnośnie „One can relate the Dixmier trace of a measurable operator to a spectral zeta-function, but a different one than that defined by (1.31). [...] but the two zeta-functions [...] do not relate to each other directly" pod koniec str 33 i na początku 34: z punktu widzenia całki nieprzemiennej i relacji ze śladem Dixmiera te dwie funkcje zeta są jakby równoważne gdyż z np. z Prop. 3.6 w [A. Carey, J. Phillips, and F. Sukochev *Spectral flow and Dixmier traces*, Adv. Math.173, 68-113 (2003)] wynika że ich residua w s = 1 są równe;
- przymiotnik „dense" nie wydaje mi się zbędny w zdaniu po (2.9)
- na str. 100 w Tw. 3.3.1 i jego dowodzie, w kilku miejscach należy zastąpić z przez s;
- na str. 110 powinna być ref [52] zamiast [120];
- na str. 116 brakuje s po prawej stronie (5.25) i przed Prop. 5.2.3 zamiast $\zeta_{T,D}$ powinno stać $\zeta_{P,D}$;
- na str. 125 po prawej stronie wzoru (5.39) lepiej wpisać $\mathcal{Z}_{D_q}(s)$.

Należy dodać, że praca napisana jest w zrozumiałym i jasnym stylu, chociaż przydałby sie index używanej notacji. Autor wykazał się dobrą znajomością języka angielskiego. Błędy jakie udało mi się zauważyć to "K-theoric" na str. 6, „are extesively in" na str. 20, „in that" na str. 23, „depend of" na str. 40, „as and" na str. 49, „theses" na str. 78, „classed" na str. 80. Natomiast dwa dostrzeżone błędy literowe w streszczeniu po polsku (strona iv) to: „Rodział" i „Główny wyniki". Na str. v. zauważyłem też angielską wersję "Michael" imienia Prof. Hellera.

Podsumowując uważam, że recenzowana praca jest interesująca, na dobrym międzynarodowym poziomie, a jej cel został w pełni zrealizowany. Spełnia ona wszystkie wymogi stawiane rozprawom doktorskim i może być dopuszczona do obrony. Jak wynika z bibliografii, niektóre jej wyniki zostały już opublikowane w wydaniu elektronicznym a inne są w przygotowaniu. W mojej opinii autor zasługuje na wyróżnienie.

Ludwik Dąbrowski

Prof. Dr Ludwik Dąbrowski
Mathematical Physics
SISSA - International School for Advanced Studies
Trieste, Italy

Trieste, 1 August 2014