Dr hab. Stanisław Spodzieja
Uniwersytet Łódzki
Wydział Matematyki i Informatyki
90-238 Łódź, ul. Banacha nr 22
tel. (42) 6355866

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym
Pani dr Leokadii Białas-Cież

1. Droga naukowa habilitantki

Pani Leokadia Białas-Cież uzyskała tytuł zawodowy magistra matematyki na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w roku 1991. Stopień doktora nauk matematycznych uzyskała na Uniwersytecie Paris-Sud roku 1999. Został on nostryfikowany przez Uniwersytet Jagielloński w tym samym roku.

Cała kariera zawodowa Pani Białas-Cież związana jest z Instytutem Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. W latach 1990-1991, jeszcze podczas studiów była zatrudniona w charakterze asystenta stażysty. W latach 1991 – 2002 pracowała jako asystent, a od 2002 r. pracuje na stanowisku adiunkta.

Mówiąc ogólnie, Pani Leokadia Białas-Cież prowadzi badania naukowe w zakresie teorii funkcji wielu zmiennych zespolonych, koncentrując się na związkach między nierównością Markowa a własnością Höldera funkcji Greena (Hölder Continuity Property) oraz zastosowań nierówności Markowa. Jej dorobek naukowy składa się z 16 opublikowanych prac naukowych w czasopismach o zasięgu międzynarodowym. W dalszym ciągu oceny prace te będą oznaczane zgodnie z przedstawionym przez Autorkę spisem publikacji w autoreferacie.

2. Ocena *osiągnięcia naukowego* w postaci zestawu prac

Habilitantka przedstawiła do oceny w postępowaniu habilitacyjnym *osiągnięcie naukowe* w postaci jednotematycznego zestawu prac zatytułowanego "Wybrane nierówności wielomianowe w kontekście funkcji Greena".

Zestaw ten składa się z następujących sześciu prac (numery pochodzą z listy publikacji dotyczących osiągnięcia naukowego w autoreferacie).

[A1] L. Białas-Cież, M. Kosek, *How to construct totally disconnected Markov sets?* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 190 (2011), no. 2, 209–224.

[A2] L. Białas-Cież, *Siciak's extremal function via Bernstein and Markov constants for compact sets in* $\mathbb{C}^N$. Ann. Polon. Math. 106 (2012), 41–51.

[A3] L. Białas-Cież, J-P.Calvi, *Pseudo Leja sequences.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 191 (2012), no. 1, 53–75.

[A4] M. Baran, L. Białas-Cież, B. Milówka, *On the best exponent in Markov inequality.* Potential Anal. 38 (2013), no. 2, 635–651.

[A5] L. Białas-Cież, R. Eggink, *Equivalence of the local Markov inequality and a Kolmogorov type inequality in the complex plane.* Potential Anal. 38 (2013), no. 1, 299–317.

[A6] M. Baran, L. Białas-Cieź, *Hölder continuity of the Green function and Markov brothers' inequality*, praca zaakceptowana do publikacji w Constr. Approx., online first: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00365-013-9224-0#page-1, DOI 10.1007/s00365-013-9224-0.

Do dokumentacji dołączono oświadczenia współautorów, z których jasno wynika, że wkład Habilitantki w *osiągnięciu naukowym* stanowi co najmniej 50 %.

Motywem przewodnim *osiągnięcia naukowego* są związki nierówności Markowa z funkcją Greena. O randze prowadzonych badań świadczy to, że nierówność Markowa leży w kręgu zainteresowań wielu matematyków zarówno w kraju jak i za granicą: J. Siciak, W. Pleśniak, W. Pawłucki, M. Baran, L. Boss, D. Burns, T. Erdélyi, A. Kroó, N. Levenberg, P. Milman, J. Szabados, V. Totik. Habilitantka w Autoreferacie bardzo dokładnie opisała zarówno rys historyczny jak i wprowadzenie merytoryczne. Na potrzeby recenzji przypomnimy jedynie podstawowe pojęcia i wyszczególnimy najistotniejsze wyniki osiągnięcia naukowego.

Niech $E \subset \mathbb{C}^N$ będzie zbiorem zwartym. *Funkcją Greena* (z biegunami w nieskończoności) zbioru E nazywamy funkcję

$$V_E(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{L}_N \text{ i } u \leq 0 \text{ na } E\}, \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

gdzie $\mathcal{L}_N = \{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : u(z) - \ln|z| \leq O(1), \text{ gdy } |z| \to \infty\}$, a $PSH(\mathbb{C}^N)$ oznacza zbiór funkcji plurisubharmonicznych w $\mathbb{C}^N$.

Mówimy, że funkcja Greena spełnia *własność Höldera* z wykładnikiem $\alpha \in (0,1]$, co zapisujemy $E \in HCP(\alpha)$, gdy istnieje stała $A > 0$ taka, że

$$|V_E(w) - V_E(z)| \leq A|w - z|^\alpha \quad \text{dla } w, z \in \mathbb{C}^N.$$

Mówimy, że zbiór E jest *zbiorem Markowa* z wykładnikiem m (w skrócie $E \in AMI(m, M)$), gdy dla każdego wielomianu N zmiennych P zachodzi nierówność Markowa:

$$\|\operatorname{grad} P\|_E \leq M(\deg P)^m \|P\|_E,$$

gdzie $\|f\|_E = \sup_{x \in E} |f(x)|$ dla funkcji określonej na zbiorze E.

Mówimy, że zbiór E spełnia *warunek V. Markowa* (w skrócie $E \in VMI(m, M)$), gdy istnieją $m, M > 0$ takie, że każdy wielomianu N zmiennych P spełnia:

$$\|D^\alpha P\|_E \leq M^{|\alpha|}(\deg P)^{m|\alpha|}(|\alpha|!)^{1-m}\|P\|_E \quad \text{dla } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N,$$

gdzie $D^\alpha P = \frac{\partial^{|\alpha|} P}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_N^{\alpha_N}}$ oznacza pochodną cząstkową rzędu $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

Mówimy, że zbiór E ma *lokalną własność Markowa* (w skrócie $E \in LMP(m)$), jeśli istnieją stałe $s \geq 1$, $c > 0$ takie, że dla każdego $z_0 \in E$ zachodzi: dla każdych $r \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^N)$,

$$|D^\alpha P(z_0)| \leq \left(\frac{cn^s}{r^m}\right)^{|\alpha|} \|P\|_{E \cap B(z_0, r)},$$

gdzie $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}^N : |z - z_0| \leq r\}$, a $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^N)$ oznacza przestrzeń wielomianów N zmiennych nad $\mathbb{C}$ stopni nie przekraczających n.

Mówimy, że zbiór zwarty $E \subset \mathbb{R}^N$ dopuszcza *nierówność Kołmogorowa w normach ilorazowych* (w skrócie $E \in KIQ(m)$) jeśli istnieją stałe $c, \kappa \geq 1$ takie, że każda funkcja f klasy $\mathcal{C}^\infty$ w $\mathbb{R}^N$ spełnia nierówność:

$$|f|_{E,j} \leq (cl^\kappa)^j \|f\|_E^{1-\frac{mj}{l}} |f|_{E,l}^{\frac{mj}{l}} \quad \text{dla } j, l \in \mathbb{N} \text{ takich, że } mj \leq l,$$

gdzie $|f|_{E,j} = \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha f\|_E$, $\|f\|_{E,j} = \|f\|_E + |f|_{E,j}$, $\|f\|_{E,0} = \|f\|_E$ oraz $|f|_{E,j} = \inf\{\|g\|_{\mathrm{conv}(E),j} : g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N),\ g|E \equiv f|_E\}$.

W pracy [A1] podano przykład całkowicie niespójnego zbioru Markowa. Podano też przykład zbioru Markowa $E \subset \mathbb{R}$ takiego, że $E \cap [0, +\infty)$ oraz $E \cap (-\infty, 0]$ nie są zbiorami Markowa.

W pracy [A2], napisanej samodzielnie przez Habilitantkę, rozważane są (α, ν) *stałe Bernsteina* dla zbiorów zwartych $E \subset \mathbb{C}^N$, tzn.

$$M_\nu^{(\alpha)}(E, w) = \sup\left\{\frac{|D^\alpha P(w)|}{\|P\|_E} : P \in \mathcal{P}_\nu(\mathbb{C}^N),\ P|E \not\equiv 0\right\},$$

gdzie $\alpha, \nu \in \mathbb{N}_0^N$ oraz (α, ν) *stałe Markowa*:

$$M_\nu^{(\alpha)}(E) = \sup\left\{\frac{\|D^\alpha P\|_E}{\|P\|_E} : P \in \mathcal{P}_\nu(\mathbb{C}^N),\ P|E \not\equiv 0\right\}.$$

Autorka pokazała, że jeśli zbiór E jest niepluripolarnym zbiorem zwartym w $\mathbb{C}^N$, to funkcja $w \mapsto M_\nu^{(\alpha)}(E, w)$ jest plurisubharmoniczną funkcją ciągłą w $\mathbb{C}^N$ (twierdzenie 2.4). Pokazała również, że funkcje

$$z \mapsto \sup_{\nu \in \mathbb{N}_0^N} (M_\nu^{(\alpha)}(E, z))^{\frac{1}{|\nu|}} \quad \text{oraz} \quad z \mapsto \limsup_{n \to \infty} (M_n^{(\alpha)}(E, z))^{\frac{1}{n}}$$

są asymptotycznie bliskie funkcji ekstremalnej Siciaka Φ_E (twierdzenie 3.1). Przypomnijmy, że $V_E = \ln \Phi_E$ w $\mathbb{C}^N$. Wyniki te rzucają nowe światło na asymptotyczne zachowanie się stałych Bernsteina i Markowa zbioru zwartego.

Praca [A3] dotyczy ciągów i pseudociągów Lei. Ciąg punktów $a_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, nazywamy *ciagiem Lei* zbioru E, gdy $|w_n(a_n)| = \|w_n\|_E$, gdzie $w_n(z) = (z - a_0) \cdots (z - a_{n-1})$, dla $n \geq 1$. Ciąg liczbowy $M_n \geq 1$ nazywamy ciągiem Edreia, gdy $\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = 1$. Ciąg $a_n \in E$ nazywamy *pseudociągiem Lei* o wzroście kontrolowanym przez ciąg M_n, gdy $M_n |w_n(a_n)| \geq \|w_n\|_E$ dla $n \in \mathbb{N}$. W omawianej pracy podano metody konstrukcji pseudociągów Lei. Podano też związek pseudociągów Lei z L-pojemnością zbioru E. Jest to ciekawy wynik mający implikacje w interpolacji Lagrange'a.

Najważniejszymii, według piszącego opinię, w osiągnięciu naukowym są prace [A4], [A5] i [A6]. W pracy [A5], przy zastosowaniu wyników pracy [A1] udowodniono uogólnienie wyniku L. Bosa i P. Milmana o zbiorach spełniających nierówność Kołmogorowa i lokalną własność Markowa: Jeśli E jest zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$ i $m \geq 1$, to

a) $E \in KPQ(m) \Rightarrow E \in LMP(m')$ dla $m' > m$, oraz $E \in KPQ(1) \Rightarrow E \in LMP(1)$,

b) $E \in LMP(m) \Rightarrow E \in KPQ(m)$.

Ciekawe wyniki osiągnięcia naukowego znajdują się w pracy [A4], gdzie podano oszacowania wykładnika w nierówności Markowa. Zagadnienie to leży w kręgu zainteresowań wielu matematyków: V. V. Andrijewskii, L. Frerick, E. Jordá, J. Wengenroth, A. Jonsson, T. Ronsveld, V. Totik.

Najciekawsze wyniki osiągnięcia naukowego znajdują się w pracy [A6]. Najważniejszym wynikiem tej pracy jest twierdzenie 2.9: Jeśli E jest zwartym podzbiorem $\mathbb{C}^N$ i $m \geq 1$, to $E \in VMI(m) \Leftrightarrow E \in HCP(1/m)$. Ponadto podano oszacowanie z dołu L-pojemności zbioru E w terminach stałej M i wykładnika m w nierówności V. Markowa.

Powyżej omówione wyniki są istotne, leżą w nurcie aktualnie prowadzonych badań w Polsce i na świecie. Dotyczą one kluczowych i trudnych problemów analizy zespolonej.

Prace są zredagowane starannie, przy użyciu zaawansowanych technik analizy zespolonej. Większość z nich już znalazło oddźwięk w środowisku matematycznym, o czym świadczą ich cytowania. Uzyskane wyniki znajdą z pewnością trwałe miejsce w teorii aproksymacji.

Niepokojącym jest fakt, że Habilitantka w ramach osiągnięcia naukowego stanowiącego podstawę do nadania stopnia doktora habilitowanego wybrała prace, z których tylko jedna jest Jej samodzielnym osiągnięciem. Dobrze to świadczy o umiejętności współpracy z innymi matematykami lecz utrudnia rozeznanie piszącego opinie w samodzielności prowadzonych badań. Mankament ten należy traktować jako drobny, a osiągnięcie naukowe jako wartościowy wkład w badania nierówności Markowa. Według mnie, *osiągnięcie naukowe* dr Białas-Cież ma wysoką rangę naukową, co wystarczająco uzasadnia staranie o nadanie stopnia doktora habilitowanego.

3. Ocena pozostałego dorobku naukowego

Pozostały dorobek naukowy Habilitantki składa się z dziesięciu publikacji oznaczonych w Autoreferacie [B1] - [B10]. Prace [B1] - [B5], z czego trzy są samodzielne, zostały otrzymane przed uzyskaniem stopnia doktora. Prace [B6] - [B10], wśród których jedna jest samodzielna, zostały opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora.

W pracy [B1] podano odpowiedź na pytanie W. Pleśniaka dotyczące nierówności A. Markowa w klasycznym zbiorze Cantora. Praca [B2] poświęcona jest słabej nierówności Markowa w zbiorach typu Cantora skojarzonych z odpowiednimi ciągami. W pracy tej podano również związek między własnością Höldera i spełnianiem nierówności Markowa dla zbiorów typu Cantora. Praca [B3] dotyczy najlepszej stałej M w nierówności Markowa dla wypukłych zwartych podzbiorów $\mathbb{R}^N$. Podano tutaj kontrprzykład na hipotezę Wilhelmsena o oszacowaniu stałej M w nierówności Markowa. W pracy [B4] pokazano, że każdy zbiór Markowa na płaszczyźnie zespolonej jest niepolarny. Podano też oszacowanie pojemności podzbioru płaszczyzny spełniającego nierówność Markowa w terminach stałej M i wykładnika m w nierówności Markowa. W pracy [B5] udowodniono, że dla zbioru zwartego $E \subset \mathbb{C}$ wykładniki w nierówności Markowa, Schura i nierówności typu Goetghelucka lub Nevai są równe. Pokazano też dla zbioru $E \subset \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ równoważność między spełnianiem nierówności Markowa, Schura i typu Goetghelucka lub Nevai.

W pracy [B6] podano oszacowanie z dołu średnicy pozaskończonej zbioru $E \subset \mathbb{C}^N$ spełniającego nierówność Markowa z wykładnikiem $m = 1$. W pracy [B7] pokazano, że zbiór zwarty z lokalną własnością Markowa jest L-regularny, w szczególności zbiór Markowa jest L-regularny. Praca [B8] dotyczy związków funkcji Greena ze stałymi Markowa $M_n(E)$. Praca [B9] dotyczy nierówności Łojasiewicza-Siciaka, a praca [B10] - własności produktowej pewnej klasy pojemności.

Prace te dobrze wpisują się w nurt badań dotyczących nierówności Markowa. Zawarte w nich wyniki są niebanalne, nowe, dotyczą ważnych i trudnych zagadnień analizy zespolonej. Z pewnością znajdą one trwałe miejsce w teorii aproksymacji i innych dziedzinach matematyki.

4. Ocena działalności dydaktycznej, popularyzatorskiej i w zakresie współpracy międzynarodowej

Dr Leokadia Bailas-Cież prowadziła w Instytucie Matematyki UJ zarówno wykłady kursowe dla studentów studiów I i II stopnia (Analiza matematyczna, Podstawy teorii aproksymacji, Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych) jak i zaawansowane wykłady dla studentów studiów doktoranckich (Interpolacja wielomianowa i jej zastosowania). Ma również doświadczenie w prowadzeniu ćwiczeń do tych wykładów. Uczestniczyła w przygotowaniu zbioru zadań z egzaminów wstępnych na Uniwersytet Jagiellońskі. Była indywidualnym tutorem dwóch studentów niepełnosprawnych. Prowadziła też zajęcia adaptacyjne dla studentów I roku studiów licencjackich. Włącza się w działalność popularyzatorską przygotowując i prowadząc quizy matematyczne dla mieszkańców Małopolski.

Pani Białas-Cież prowadzi intensywną działalność naukową we współpracy z ośrodkami zagranicznymi w Niemczech i Francji uczestnicząc w stażach zagranicznych oraz wielu grantach zarówno krajowych jak i międzynarodowych. Uczestniczyła w wielu konferencjach krajowych oraz kilku zagranicznych wygłaszając na nich referaty. Działalność ta została zauważona i doceniona przez Rektora Uniwersytetu Jagiellońskiego, który przyznał Jej nagrodę indywidualną I stopnia. Była też laureatką kilku nagród zespołowych.

Habilitantka udziela się również na polu organizacyjnym przygotowując i uczestnicząc w realizacji projektów w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, pełniąc rolę pełnomocnika Dziekana oraz delegata niesamodzielnych nauczycieli akademickich w Radzie Wydziału Matematyki i Informatyki UJ oraz w Radzie Instytutu Matematyki UJ.

Ocena działalności Habilitantki w obszarach omawianych w tym punkcie wypada zdecydowanie pozytywnie.

5. Konkluzja

Zbierając powyższe uwagi i oceny, stwierdzam, że dr Leokadia Białas-Cież jest matematykiem o dużym zasobie wiedzy w zakresie jej działalności naukowej, a powierzone jej zajęcia dydaktyczne pozwalają sądzić, że wiedza ta sięga znacznie szerzej. Zarówno *osiągnięcie naukowe* jak i pozostały dorobek znajdują uznanie i oddźwięk w badaniach naukowych innych matematyków. Wymogi ustawowe dotyczące Impact Factor, Indeksu Hirscha i liczby cytowań są spełnione z nawiązką.

Drobnym mankamentem jest mała liczba publikacji opracowanych samodzielnie przez Habilitantkę. W świecie współczesnym opartym na Internecie, współpracy i wymiany myśli zarzut ten jest jednocześnie zaletą Pani Białas-Cież. Świadczy o tym, że potrafi pracować w zespołach zarówno ze współpracownikami w kraju jak i z zagranicy.

Uważam, że zarówno *osiągnięcie naukowe* jak i pozostały dorobek naukowy wraz z dorobkiem dydaktycznym, popularyzatorskim i w zakresie współpracy międzynarodowej Pani dr Leokadii Białas-Cież spełniają wymogi ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z 2003 r. Z przekonaniem popieram nadanie Jej stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka.

Łódź, 29 kwietnia 2014 r.

S. Spodzieja
....
Stanisław Spodzieja