Kraków, 19.03.2014

prof. dr hab. Armen Edigarian
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
armen.edigarian@uj.edu.pl

Recenzja rozprawy habilitacyjnej Leokadii Białas-Cież pt. "Wybrane nierówności wielomianowe w kontekście funkcji Greena"

Omówienie rozprawy

Rozprawa składa się z sześciu prac habilitantki. Jedna z nich nie ma współautorów, natomiast pozostałe pięć powstały we współpracy[1].

[A1] L. Białas-Cież, M. Kosek, *How to construct totally disconnected Markov sets?*, Ann. Mat. Pura Appl., 190 (2011), 209–224.

Główną ideą pracy jest podanie przykładów zwartych zbiorów na płaszczyźnie, które nie są spójne i które spełniają własność Markowa. Zresztą ta problematyka przewija się przez większość prac z rozprawy habilitantki. Głównym twierdzeniem na którym się opierają przykłady jest

Theorem 1. *Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem zwartym oraz niech $z_0 \in K$. Oznaczmy przez $T = \{t \geqslant 0 : \exists z \in K : |z - z_0| = t\}$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ oraz $j \in \{1, \dots, n\}$. Załóżmy, że istnieje stała $C_{j,n} > 0$ taka, że dla dowolnego wielomianu $Q \in \mathcal{P}_n$ zachodzi nierówność $|Q^{(j)}(0)| \leqslant C_{j,n}\|Q\|_T$. Wtedy dla dowolnego wielomianu $P \in \mathcal{P}_n$ zachodzi nierówność $|P^{(j)}(z_0)| \leqslant 2nC_{j,n}\|P\|_K$.*

Dzięki temu wynikowi autorki są w stanie analizować przykłady powstające z obrotów zbiorów określonych na prostej rzeczywistej dookoła zera. W szczególności, można obracać zbiór Cantora i otrzymać nowe przykłady zbiorów na płaszczyźnie z własnością Markova.

W związku z oświadczeniem Pani dr Marty Kosek w analizie tej pracy nie wziąłem pod uwagę wyników dotyczących dynamiki zespolonej (Rozdziały 4,5,6).

Praca jest cytowana przez habilitantkę i R. Egginka w pracy [A5].

[A2] L. Białas-Cież, *Siciak's extremal function via Bernstein and Markov constants for compact sets in $\mathbb{C}^N$*, Ann. Polon. Math., 106 (2012), 41–51.

W pracy autorka definiuje stałe Bernsteina i Markova i pokazuje zależności między nimi. Stosowane metody są w miarę standardowe.

Praca nigdzie nie jest cytowana.

[A3] L. Białas-Cież, J-P. Calvi, *Pseudo Leja sequences*, Ann. Mat. Pura Appl., 191 (2012), 53–75.

[1] W recenzji będę stosował te same oznaczenia, jakie pojawiają się w rozprawie habilitacyjnej.

Wśród prac, zawartych w rozprawie, ta praca istotnie się różni od pozostałych. Bowiem idzie w kierunku matematyki obliczeniowej, gdzie istotne są ciągi lub zbiory, "aproksymacyjnie" spełniające daną własność.

Przy badaniu zbiorów zwartych na płaszczyźnie dwa ciągi, Fekete oraz Leja, odgrywają dość istotną rolę. Mówimy, że ciąg $\{a_n\} \subset K$ jest ciągiem Leji dla zbioru zwartego K, jeśli a_0 jest dowolnym punktem oraz dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$|w_n(a_n)| = \max_{z \in K} |w_n(z)|, \quad \text{gdzie } w_n(z) = (z - a_0) \ldots (z - a_{n-1}).$$

Uśredniając miary Diraca w tych punktach i biorąc (słabą) granicę podciągu tych miar otrzymamy miarę równowagi danego zbioru.

Ciąg $\{a_n\} \subset K$ jest ciągiem Leji dla zbioru zwartego K oraz dla ciągu liczbowego $\{M_n\}$ takiego, że $M_n \geqslant 1$ oraz $M_n^{1/n} \to 1$, jeśli a_0 jest dowolnym punktem oraz dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$M_n |w_n(a_n)| \geqslant \max_{z \in K} |w_n(z)|, \quad \text{gdzie } w_n(z) = (z - a_0) \ldots (z - a_{n-1}).$$

W pracy pokazano, że tę samą własność mają pseudociągi Leji[2]

W dalszej części (Twierdzenia 3 oraz 4) pokazano, jak się rozkładają punkty pseudociągu Leji dla zbiorów zwartych spełniających własność Markova oraz pokazano algorytm szukania takich ciągów dla pewnych zbiorów.

W tej pracy widać ogromny wpływ J-P. Calvi, który w swoich badaniach właśnie koncentruje się na obliczeniowej stronie w teorii potencjału. Zawiera jednak w dużej mierze wyniki typu "uwag".

Praca cytowana 4 razy.

[A4] M. Baran, L. Białas-Cież, B. Milówka, *On the best exponent in Markov inequality*, Potential Anal., 38 (2013), 635–651.

Załóżmy, że zbiór zwarty K spełnia nierówność Markova, czyli

$$\| |\nabla P| \|_K \leqslant M(\deg P)^m \|P\|_K \tag{1}$$

dla dowolnego wielomianu P. Tu m, M są pewnymi stałymi. Wykładnikiem Markova zbioru K autorzy nazywają liczbę

$$m(K) = \inf\{m > 0 : \exists M > 0 \ \forall P \text{ inequality (1) holds}\}.$$

W rozdziale 2 autorzy podają przykłady zbiorów zwartych, że to infimum nie jest osiągnięte.

Rozdział 3 zawiera zaskakujący jak dla mnie przykład zbioru zwartego, który powstaje z symetrycznych odbić tzw. zbioru Zernera, czyli zbioru, który spełnia nierówność Markova we wszystkich punktach, oprócz początku układu. Nowopowstały zbiór już spełnia nierówność Markova w zerze, ale mimo to nie jest zbiorem Markova.

[2]Stosuję to samo nazewnictwo jak habilitantka, ale te "pseudociągi" są jak najbardziej ciągami, które aproksymacyjnie są ciągami Leji. Jeśli nazewnictwo angielskie jest do przyjęcia, to jednak odpowiednik polski jest, według mnie, nienajlepszy.

Praca cytowana 2 razy.

[A5] L. Białas-Cież, R. Eggink, *Equivalence of the local Markov Inequality and a Kolmogorov type inequality in the complex plane*, Potential Anal., 38 (2013), 299–317.

W pracy autorzy przenoszą wyniki Bosa i Milmana z przypadku rzeczywistego na płaszczyznę zespoloną. Okazuje się to bardzo nieprostym zadaniem. Wprowadzono wiele warunków (nierówności "typu Kolmogorowa") oraz pokazano związki między nimi oraz lokalną nirównością Markova. Pokazano również związek z doskonałością (tzw. (m, k)-doskonalością) zbioru zwartego.

W rozprawie habilitantki ta praca niewątpliwie jest najbardziej techniczna.

[A6] M. Baran, L. Białas-Cież, *Hölder Continuity of the Green Function and Markov Brothers' Inequality*, Constr. Approx., (2013).

Zgodnie z oświadczeniem, Rozdział 4 został napisany całkowicie przez współautora. Dlatego w ocenie ten rozdział nie wziąłem pod uwagę.

Niech $E \subset \mathbb{C}^N$ będzie zbiorem zwartym. Mówimy, że E spełnia własność HCP (Hölder Continuity Property) ze stałymi $\gamma \in (0, 1]$ oraz $B > 0$ i piszemy $E \in HCP(\gamma, B)$ jeśli

$$V_E(z) \leqslant B \operatorname{dist}(z, E)^\gamma \quad \text{dla dowolnego } z \in \mathbb{C}^N.$$

W pracy autorzy wprowadzili nową klasę zbiorów zwartych. Mówimy, że E spełnia nierówność V. Markova ze stałymi $m \geqslant 1$ oraz $M > 0$ i piszemy $E \in VMI(m, M)$ jeśli

$$\|D^\alpha P\|_E \leqslant M^{|\alpha|} \frac{(\deg P)^{m|\alpha|}}{(|\alpha|!)^{m-1}} \|P\|_E \quad \text{dla dowolnych } \alpha \in \mathbb{N}_0^N, P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^N).$$

W głównym wyniku pracy (w Twierdzeniu 2.9) autorzy pokazują, że dla odpowiednio dobranych γ, B, m, M z przynależności do klasy HCP wynika przynależność do klasy VMI i na odwrót.

Podstawową technniką dowodową jest wzór całkowy Cauchy'ego w polidysku, wzór Taylora oraz definicja funkcji Greena V_E (a raczej jej związku z funkcją Siciaka Φ_E).

Rozdział piąty zawiera dwa przykłady zbiorów zwartych (jeden na płaszczyźnie zespolonej, drugi w $\mathbb{C}^N$), które są klasy HCP.

Dodatkowy dorobek

Poza przedstawioną rozprawą, po doktoracie habilitantka napisała 5 prac. Mimo tego, że ich tematyka nie odbiega za bardzo od przedstawionej w rozprawie, jednak ten dorobek uważam za istotnie większy. Prawdopodobnie ze względu na moje zainteresowania, najbardziej mi się podoba ostatnia praca o własności produktowej pojemności w $\mathbb{C}^N$.

Podsumowanie

Każda z omawianych prac zawiera ciekawe pomysły i są, w moim przekonaniu, nietrywialne. Sam miałem okazje analizować i pracować nad niektórymi z nich (byłem promotorem pracy doktorskiej Pana R. Egginka) i jestem daleki od uznania ich jako prostych. Ale brakuje mi nowych technik i narzędzi. Stosowane są w miarę standardowe metody, pojawiające się w teorii potencjału na płaszczyźnie zespolonej. Mimo tej krytycznej uwagi, jednak osobiście dobrze oceniam prace habilitantki.

Wnoszę o dopuszczenie Pani dr Leokadii Białas-Cież do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Edygarucki